



CVETKO CRNOJEVIĆ

MEHANIKA FLUIDA

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

2018.

Cvetko Crnojević

MEHANIKA FLUIDA

Treće izdanje

Mašinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

2018.

MEHANIKA FLUIDA

Treće izdanje

● Autor:

Dr Cvetko Crnojević, dipl. inž. maš.

Redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

● Recenzenti:

Dr Slobodan Stupar, dipl. inž. maš.

redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr Aleksandar Gajić, dipl. inž. maš.

redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

● Izdavač:

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Kraljice Marije 16, 11120 Beograd 35,

telefon: (011) 3370 350 i 3302 384, fax: (011) 3370 364

Za izdavača: Dekan prof. dr Radivoje Mitrović

Glavni i odgovorni urednik: Prof. dr Milan Lečić

Štampanje odobrila Komisija za izdavačku delatnost: br. 19/18 od 20.09.2018. god.

Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

● Korice:

Autor

● Štampa:

PLANETA PRINT

Ruzveltova 10, 11000 Beograd

tel/fax (011) 3088 129

Tiraž: 500 primeraka

© Autor i Mašinski fakultet, Beograd 2018.

Preštampavanje i fotokopiranje nije dozvoljeno. Sva prava zadržava izdavač i autor.

PREDGOVOR

Osnovni motiv za pisanje ove knjige jesu studenti Mašinskog fakulteta u Beogradu koji slušaju neki od predmeta iz oblasti mehanike fluida, i želja da oni lakše mogu da prate izučavanje gradiva iz mehanike fluida i da spremaju ispite iz istih. Istorijski gledano na Katedri za mehaniku fluida Mašinskog fakulteta u Beogradu napisano je dobrih knjiga: „*Mehanika fluida*” od Konstantina Voronjeca i Nikole Obradovića (1960), „*Osnovi hidraulike i pneumatike*” od Radomira Aškovića (1978), „*Dinamika jednodimenzijskih strujanja fluida*” od Vladana Đorđevića (1986), „*Statika i kinematika fluida*” od Viktora Saljnikova (1988), „*Hidrodinamika*” od Svetislava Čantraka (1998), i druge. U odnosu na navedene godine prvih izdanja ovih knjiga one su doživele više izdanja, ali, nažalost, većina od ovih knjiga, sticajem raznih okolnosti, odavno nisu štampane, i nisu dostupne širem krugu korisnika, tako da je postojala realna potreba da se ovaj nedostatak udžbeničke literature nadoknadi, pa sam početkom 2013. god. u svojstvu šefa Katedre za mehaniku fluida i predmetnog profesora odlučio da pisanjem ovog udžbenika pokušam da nadoknadim ovaj nedostatak. Koliko sam uspeo, u ovom ni najmanje lakom zadatku, neka procenjuju sami čitaoci, a meni će biti zadovoljstvo ako sam bar delimično to postigao.

Pri pisanju ovog udžbenika koristio sam dugogodišnje iskustvo držanja nastave iz predmeta koji proučavaju mehaniku fluida ili su naslonjeni na nju. Imajući u vidu da su vremenom kroz brojne Statute Mašinskog fakulteta u Beogradu predmeti koji proučavaju mehaniku fluida nosili različite nazive, obime i sadržaje, odlučio sam da napišem knjigu iz mehanike fluida koja nije striktno pisana ni po jednom konkretnom kursu, pa ni po trenutno važećim predmetima: Mehanika fluida B i Mehanika fluida M, ali koja po svom sadržaju pokriva oba ova kursa, čak, delimično, nešto šire od toga. Ova knjiga osim studentima može korisno da posluži i inženjerima i istraživačima da unaprede svoja znanja iz oblasti mehanike fluida.

Kada sam započeo rad na pisanju knjige, bez obzira na prethodno pedagoško iskustvo, nisu se naslućivale teškoće: šta dati, kako prikazati izloženu materiju, kako se jasno izraziti i sl. Pri pisanju ove knjige veoma često sam imao dileme vezane za redosled tematskih jedinica, dokle ići i gde stati, dokle su „fluidi” a odakle počinje matematika, fizika ili termodinamika, dokle su osnove a odakle produbljena znanja i sl. Sa pisanjem nisam „žurio” u želji da pokrijem sve relevantne oblasti potrebne studentima i s namerom da je korisnicima izložena materija razumljivija. Kada se pogleda konačni tekst ove knjige on u mnogome ne liči na ono što sam zamišljao na početku da će biti, ipak, i u ovom gotovom tekstu knjige ima mnogo toga što bih rado menjao ili dopunio.

Proučavajući, u toku pisanja ove knjige, brojnu savremenu stručnu literaturu sa većeg broja svetskih univerziteta lako se dalo zapaziti da je „svet otišao napred”, što je nametnulo obavezu da se Mehanika fluida koja se predstavlja našim studentima delimično približi tim trendovima. Iz istih razloga neke oblasti su detaljnije obrađene nego u dosadašnjim klasičnim kursovima mehanike fluida, kao što su: kinematika fluida, zakoni održanja, teorija sličnosti, dimenzijska analiza, proračun cevovodnih mreža, hidroudar, teorija graničnog sloja, i turbulentna strujanja. U savremenoj literaturi iz

mehanike fluida koristi se tenzorski račun tako da su u ovoj knjizi, i pored toga što ne pripadaju nastavnom programu, date osnove ovog računa.

Nedostatak ove knjige jeste što ona treba da pokrije osnovne pojmove i znanja, ali i nadgradnju iz mehanike fluida, tako da su pojedine oblasti obrađivane na neujednačenim nivoima. To je razlog da su kroz izloženu materiju dati i osnovni pojmovi, ali i detaljnije izložena pripadajuća teorija, ponekad opširnije nego što to zahtevaju postojeći kursevi na Mašinskom fakultetu. Drugi objektivni „problem” jeste što su primene mehanike fluida u mašinskoj tehnici i inženjerstvu uopšte veoma brojne, tako da kroz jedan udžbenik nije ni najmanje jednostavno pokriti potrebe za znanjima iz mehanike fluida inženjera iz različitih tehničkih oblasti. Svi ovi elementi uticali su na odluku da se napiše knjiga koja formalno ne sledi ni jedan konkretan kurs, ali koja, nadam se, sadrži sve neophodne elemente koji treba da su obuhvaćeni kroz jedan univerzitetski udžbenik iz Mehanike fluida.

Mehanika fluida je klasična nauka, ona je potrebna, lepa i teška, tako da se čitaoci ne obeshrabuju pri korišćenju ove knjige, jer je ona podjednako teška i studentima i specijalistima. Studenti koji budu koristili ovu knjigu ne treba da se plaše njenog obima jer za njihove ispite potrebni su samo neki njeni delovi. Za uspešno praćenje izložene materije iz mehanike fluida potrebna su odgovarajuća znanja iz matematike, mehanike i termodinamike. S tim u vezi pitam se: da li knjiga iz mehanike fluida može biti sa jednostavnom materijom, osim na elementarnom nivou, i da li je moguće napisati knjigu iz Mehanike fluida a da ona sadrži jednostavan matematički aparat?

U ovoj knjizi u odnosu na prethodna nastavna iskustva na Katedri za mehaniku fluida neke oznake veličina su promenjene i prilagođene oznakama koje se većinski koriste u savremenoj svetskoj stručnoj literaturi. Izvođenja koja su data uglavnom su u skraćenom obliku, ali nadam se u dovoljno razumljivom obliku. Na nekim mestima, u različitim poglavljima knjige neki fenomeni su dva puta obrađivani, ali sa različitim obimom, to je zato da se oni studenti koji slušaju samo osnove kroz kurs Mehanika fluida B ne opterećuju sa produbljenim proučavanjem mehanike fluida. U knjizi nisu dati primeri, jer se oni nalaze u knjizi „Klasična i uljna hidraulika” od istog autora, i u knjizi „Mehanika fluida - Teorija i praksa” od grupe autora: S. Čantrak, M. Benišek, M. Pavlović, P. Marjanović i C. Crnojević, u izdanjima Mašinskog fakulteta iz Beograda.

Veliku zahvalnost dugujem recenzentima prof. dr Slobodanu Stuparu, šefu Katedre za vazduhoplovstvo, i prof. dr Aleksandru Gajiću, šefu Katedre za hidraulične mašine i energetske sisteme, na savesno pregledanom tekstu knjige i na njihovim korisnim sugestijama i preporukama. Posebnu zahvalnost dugujem mom profesoru, akademiku Vladanu Đorđeviću koji je smogao snage i odvojio vreme da pročita radnu verziju dela teksta ove knjige, poglavlja od 1. do 6., i koji mi je dao veći broj sugestija i ukazao na propuste i nepreciznosti u tekstu. Posebnu zahvalnost dugujem supruzi Ljiljani i ćerki Marini koje su mi pomogle oko kompjuterske obrade teksta, i koje su detaljno pročitale tekst ove knjige i ispravile uočene štamparske greške.

I pored uloženog truda da je tekst razumljiv i bez štamparskih grešaka, svim čitaocima koji mi ukažu na nepreciznosti, propuste, ili štamparske greške unapred se zahvaljujem. Zapažanja i sugestije čitalaca biće dobrodošle.

PREDGOVOR II IZDANJU

U ovom izdanju knjige izvršene su ispravke svih uočenih grešaka i nepreciznosti iz teksta I izdanja. Radi kompletiranja pojedinih poglavlja u Poglavlju 1. dodato je fizičko svojstvo površinskog napona i kapilarnosti, u Poglavlju 5. kroz obradu sile otpora i uzgona opstrujavanog tela dodate su osnove aerodinamike sporta i aerodinamike automobila, u Poglavlju 9. dodato je tačno rešenje-II Stoksov problem, i u Poglavlju 16. dodata je teorija ravanskog turbulentnog mlaza.

Beograd, novembar 2015.

Autor

PREDGOVOR III IZDANJU

U ovom izdanju knjige izvršene su ispravke manjeg broja uočenih štamparskih grešaka u tekstu II izdanja. Ovo III izdanja knjige ostalo je neizmenjeno u odnosu na II izdanje, osim Poglavlja 16. u kome je dodat kraći tekst koji se odnosi na modeliranje turbulencije.

Beograd, septembra 2018.

Autor

SADRŽAJ

1. UVOD I FIZIČKA SVOJSTVA FLUIDA	1
1.1. Kratak istorijski prikaz razvoja mehanike fluida	1
1.2. Primene mehanike fluida	3
1.3. Pojam fluida	4
1.4. Fluidni delić	6
1.5. Zadatak mehanike fluida	6
1.6. Fizička svojstva fluida	8
1.6.1. Gustina fluida	8
1.6.1.1. Gustina tečnosti	9
1.6.1.2. Jednačine stanja gasova	10
1.6.2. Viskoznost	12
1.6.2.1. Viskoznost gasova	14
1.6.2.2. Viskoznost tečnosti	15
1.6.2.3. Viskoznost prema kinetičkoj teoriji gasova	16
1.6.2.4. Uticaj pritiska na viskoznost-piezo viskoznost	17
1.6.2.5. Viskozimetri	17
1.6.2.6. Reologija – njutnovski i nenjutnovski fluidi	18
1.6.3. Toplotna provodljivost fluida	19
1.6.4. Površinski napon – kapilarnost	20
1.7. Analogija između fizičkih veličina	22
1.8. Pritisak	23
1.9. Temperatura	24
1.10. Sile koje deluju na fluid	24
1.10.1. Površinske sile	24
1.10.2. Zapreminske-masene sile	26
1.11. Vektor i tenzor napona	27
1.11.1. Kratak uvod u tenzorski račun	27
1.11.2. Vektor napona i tenzor napona	33
1.11.3. Simetričnost tenzora napona	37
1.11.4. Razlaganje tenzora napona	38
2. MIROVANJE FLUIDA	41
2.1. Naponsko stanje u fluidu koji miruje	41
2.2. Svojstva hidrostatičkog pritiska	41
2.3. Osnovna jednačina hidrostatičke - Ojlerova jednačina	42
2.4. Priroda zapreminske sile	44
2.5. Mirovanje fluida u polju sile Zemljine teže	44
2.6. Mirovanje nestišljivog fluida	44
2.6.1. Izobarske površi	45

2.6.2.	Polje pritiska	46
2.6.3.	Merenje pritiska U-cevima	47
2.7.	Paskalov zakon	48
2.7.1.	Proste hidrauličke mašine	49
2.8.	Proračun cevi pod pritiskom	50
2.9.	Sile pritiska	51
2.9.1.	Opšte razmatranje	51
2.9.2.	Sile pritiska na ravne površi na kojima je pritisak konstantan	52
2.9.3.	Sila pritiska tečnosti na ravnu površ na kojoj je pritisak promenljiv	53
2.9.4.	Paskalov hidrostatički paradoks	54
2.9.5.	Sile pritiska tečnosti koje deluju na krive površi	55
2.9.5.1.	Metoda ravnoteže tečnosti	57
2.9.6.	Sila potiska – Arhimedova sila	58
2.9.7.	Stabilnost tela pri plivanju	60
2.10.	Relativno mirovanje tečnosti	62
2.10.1.	Relativno mirovanje tečnosti pri translaciji	62
2.10.1.1	Sile pritiska koje deluju na ravne i krive površi	63
2.10.2.	Relativno mirovanje tečnosti pri rotaciji	65
2.11.	Mirovanje stišljivog fluida	68
2.11.1.	Izotemska atmosfera	68
2.11.2.	Adijabatska atmosfera	69
2.11.3.	Standardna atmosfera	70
3.	KINEMATIKA FLUIDA	73
3.1.	Načini proučavanja strujanja fluida	73
3.2.	Brzina strujanja	75
3.3.	Strujno polje. Strujnica. Strujna cev. Strujno vlakno	76
3.4.	Ubrzanje fluidnog delića - Materijalni izvod	79
3.5.	Protok fluida	81
3.6.	Srednje vrednosti strujnih veličina	83
3.7.	Fizičko tumačenje $\text{div } \vec{v}$ - Teorema Gaus-Ostrogradski	83
3.7.1.	Izvori i ponori u struji fluida	85
3.8.	Rejnoldsova transportna teorema	86
3.9.	Zakon održanja mase – jednačina kontinuiteta	87
3.9.1.	Integralni oblik jednačine kontinuiteta	89
3.10.	Kretanje i deformisanje fluidnog delića	90
3.10.1.	Brzina deformisanja fluidnog delića	92
3.10.2.	Ugaona brzina fluidnog delića	95
3.10.3.	Opšte kretanje fluidnog delića	98
3.11.	Potencijalna strujanja	99
3.12.	Vrtložna i nevtložna strujanja	100
3.12.1.	Nevrtložno potencijalno strujanje-potencijal ubrzanja	102
3.12.2.	Cirkulacija	102
3.12.3.	Stoksova teorema	104

3.12.4. Kelvinova teorema o održanju cirkulacije	106
3.12.5. Startni vrtlog	108
3.12.6. Slobodan vrtlog	111
3.12.7. Helmholtčeve teoreme vrtložnosti	112
3.13. Laminarni i turbulentni režim strujanja	114
4. OSNOVNE JEDNAČINE MEHANIKE FLUIDA	119
4.1. Zakon održanja mase – jednačina kontinuiteta	119
4.2. Zakon o promeni količine kretanja fluida	120
4.2.1. Pretpostavke o naponima u fluidu	122
4.2.2. Navije-Stoksove jednačine	124
4.2.3. Ojlerove jednačine	125
4.2.4. Jednačina vrtložnosti - Helmholtčeve jednačine	126
4.2.4.1. Jednačina vrtložnosti za neviskozno strujanje	128
4.3. Zakon promene kinetičke energije	129
4.3.1. Disipacija energije	129
4.4. Zakon održanja energije	131
4.5. Granični i početni uslovi	135
5. TEORIJA SLIČNOSTI	139
5.1. Bezdimenzijski oblici bilansnih jednačina i karakteristični bezdimenzijski brojevi	140
5.1.1. Bezdimenzijski oblik Navije-Stoksovih jednačina i dinamički kriterijumi sličnosti	140
5.1.1.1. Analiza reda veličine članova Navije-Stoksovih jednačina	146
5.1.2. Bezdimenzijski oblik jednačine kontinuiteta	147
5.1.3. Bezdimenzijski oblik jednačine energije – termodinamička sličnost	147
5.2. Kriterijumi sličnosti	150
5.2.1. Potpuna i nepotpuna sličnost	153
5.2.2. Primena teorije sličnosti na turbomašine	156
6. DIMENZIJSKA ANALIZA	159
6.1. Sistemi jedinica	159
6.2. Rejljeva metoda i primeri njene primene	161
6.2.1. Sila kojom fluid deluje na telo - sile otpora i uzgona	163
6.2.1.1. Koeficijent otpora sfere i cilindra	167
6.2.1.2. Koeficijent otpora broda	169
6.2.1.3. Koeficijenti otpora i uzgona aeroprofila	169
6.2.1.4. Aerodinamika sporta	171
6.2.1.5. Aerodinamika automobila – koeficijent otpora automobila	173
6.2.2. Tangencijalni napon na zidu	175
6.2.3. Pad pritiska na lokalnom gubitku strujne energije	177

6.3.	PI-teorema	178
6.3.1	Pad pritiska u cevi kružnog poprečnog preseka - Darsijeva formula	179
7.	DINAMIKA NEVISKOZNOG FLUIDA	183
7.1.	Ojlerove jednačine	183
7.2.	Bernulijevi integrali Ojlerove jednačine	184
7.2.1.	Bernulijeva jednačina za strujnicu	184
7.2.2.	Bernulijeva jednačina za nevtložno strujanje	185
7.3.	Potencijal ubrzanja neviskoznog strujanja	185
7.4.	Bernulijeva jednačina za neviskozno nestišljivo strujanje	186
7.4.1.	Pito-cev	187
7.4.2.	Prantlova sonda	188
7.4.3.	Osrednjena Pito-cev	190
7.5.	Strujanje stišljivog neviskoznog fluida	191
7.5.1.	Izotermno strujanje gasa	191
7.5.2.	Izentropsko strujanje gasa – San Venanova jednačina	191
8.	DVODIMENZIJSKA STRUJANJA NEVISKOZNOG FLUIDA	195
8.1.	Strujna funkcija	196
8.1.1.	Veza strujne funkcije i protoka	197
8.1.2.	Veza potencijala brzine i cirkulacije	198
8.2.	Ravanska strujanja	198
8.2.1.	Primena kompleksnih analitičkih funkcija	199
8.2.2.	Jednolika pravolinijska struja – strujanje preko ravne ploče	203
8.2.3.	Strujanje u pravom uglu i udar mlaza u ravnu ploču	204
8.2.4.	Strujanje preko ravnih ploča i u uglu između ravnih zidova	205
8.2.5.	Usamljeni izvor ili ponor	207
8.2.6.	Usamljeni vrtlog	209
8.2.7.	Metoda superpozicije potencijalnih strujanja	210
8.2.8.	Metoda singulariteta – - modeliranje željene konture opstrujavanog tela	211
8.2.9.	Dvopol	213
8.2.9.1.	Kosi dvopol	215
8.2.10.	Izvor u jednolikoj struji – Rankinovo telo	215
8.2.11.	Izvor i ponor u jednolikoj struji – Rankinov oval	218
8.2.12.	Opstrujavanje kružnog cilindra bez cirkulacije	219
8.2.13.	Opstrujavanje kružnog cilindra sa cirkulacijom	221
8.3.	Sile i momenti koji deluju na telo u struji neviskoznog fluida	224
8.3.1.	Sila koja deluje na telo u neviskoznoj struji fluida - Prva Blazijusova formula	224
8.3.2.	Sile otpora i uzgona telo u neviskoznoj struji fluida Teorema Žukovskog i Dalamberov paradoks	225
8.3.3.	Moment koji deluje na telo u neviskoznoj struji fluida	

– Druga Blazijusova formula	228
8.4. Metoda konformnog preslikavanja	229
8.4.1. Osobine konformnog preslikavanja	230
8.4.2 Transformacija Žukovskog	232
8.4.3. Opstrujavanje tanke ploče	240
9. TAČNA REŠENJA	245
9.1. Laminarno strujanje između paralelnih ploča	245
9.1.1. Laminarno strujanje između nepokretnih paralelnih ploča	246
9.1.2. Laminarno strujanje između pokretne i nepokretne paralelne ploče ..	247
9.1.3. Laminarno strujanje između paralelnih ploča sa razmenom količine toplote	249
9.2. Laminarno strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka	251
9.3. Laminarno strujanje u koncentričnom kružnom procepu	254
9.4. Laminarno opstrujavanje sfere - Stoksovo rešenje	256
9.5. Nestacionarno laminarno strujanje iznad ravne ploče - slična rešenja – - prvi Stoksov problem	261
9.6. Oscilatorno kretanje ploče – drugi Stoksov problem	264
9.7. Nestacionarno strujanje ravanskog vrtloga	266
9.8. Osnove hidrodinamičke teorije podmazivanja – klizni ležaj	268
9.9. Laminarno strujanje između dva saosna obrtna cilindra	271
10. JEDNODIMENZIJSKA STRUJANJA NESTIŠLJIVIH FLUIDA HIDRAULIKA	275
10.1. Jednačina kontinuiteta	275
10.2. Greške koje se prave uvođenjem srednje brzine	276
10.3. Zakon o promeni količine kretanja	278
10.4. Zakon održanja strujne energije – opšta Bernulijeva jednačina	280
10.4.1. Geometrijska interpretacija Bernulijeve jednačine	283
10.5. Gubici strujne energije	283
10.6. Gubici usled trenja – Darsijeva formula	284
10.6.1. Koeficijent trenja	285
10.6.2. Eksplicitne formule	287
10.6.3. Nikuradzeov i Mudijev dijagram	289
10.6.4. Uticaj vremenskog perioda korišćenja cevovoda na koeficijent trenja	292
10.6.5. Empirijske metode	293
10.6.5.1. Veze između Darsijeve i empirijskih formula	295
10.7. Lokalni gubici strujne energije	296
10.7.1. Eksperimentalno određivanje koeficijenta lokalni gubici stujne energije	298
10.7.2. Naglo proširenje – Bordina formula	299
10.7.3. Naglo suženje	301

10.7.4.	Krivine	303
10.7.5.	Uisne cevi	304
10.7.6.	Difuzori	304
10.7.7.	T-račve	306
10.7.8.	Ventili i slavine	309
10.7.9.	Međusobni uticaj lokalnih gubitaka	310
10.7.10.	Merenje protoka primenom lokalnih gubitaka	312
11.	HIDRAULIČKI PRORAČUN CEVOVODA	317
11.1.	Hidraulička karakteristika cevododa	319
11.2.	Hidraulički proračun prostog cevododa	320
11.2.1.	Gravitacioni transport	321
11.2.2.	Pumpni transport. Karakteristike pumpi	322
11.2.3.	Sprezanje pumpi	324
11.2.4.	Kavitacija. Uisna visina pumpi	315
11.3.	Hidraulički proračun složenih cevododa	328
11.3.1.	Redno povezivanje cevododa	329
11.3.2.	Paralelno povezivanje cevododa	330
11.3.3.	Hidraulički proračun prstenastih mreža	331
12.	PRIMERI PRIMENE ZAKONA O PROMENI KOLIČINE KRETANJA	339
12.1.	Sile i momenti nastali promenom količine kretanja	339
12.2.	Brzina zvuka	340
12.3.	Turboreaktivni mlazni motor	342
12.4.	Ojlerova jednačina za turbomašine	343
12.5.	Peltonova turbina	335
12.6.	Vetroturbine	346
13.	HIDRAULIČKI UDAR	349
13.1.	Porast pritiska pri hidroudaru – formula Žukovskog	352
13.2.	Brzina propagacije poremećaja konačnog intenziteta	353
13.3.	Zaštita cevododa od hidroudara	356
13.4.	Sistem jednačina koji opisuje jednodimenzijsko nestacionarno strujanje tečnosti	357
13.4.1	Metoda karakteristika	358
14.	JEDNODIMENZIJSKA STRUJANJA GASOVA	363
14.1.	Osnovne jednačine 1D strujanja gasa	363
14.1.1.	Jednačina kontinuiteta	363
14.1.2.	Jednačina količine kretanja	363
14.1.3.	Jednačina energije	364
14.1.4.	Jednačina energije za složene geometrije	368

14.2.	Pojam entropije. Drugi zakon termodinamike	369
14.3.	Izentropsko strujanje	371
14.3.1.	Totalne i kritične vrednosti strujnih veličina	372
14.3.2.	Uticao Mahovog broja na stišljivost gasa	375
14.4.	Pokretni poremećaji u fluidu	376
14.5.	Prav udarni talas	378
14.5.1.	Veza između veličina stanja pre i posle udarnog talasa	380
14.5.2.	Prantlove relacije	382
14.5.3.	Udarna adijabata	383
14.5.4.	Promena entropije kroz prav udani talas	384
14.5.5.	Pito cev u dozvučnoj i nadzvučnoj struji gasa	385
14.6.	Strujanje kroz mlaznike	387
14.6.1.	Izentropsko strujanje kroz Venturijevu cev	387
14.6.2.	Izentropsko strujanje kroz konvergentni mlaznik	388
14.6.3.	Efekti promene poprečnog preseka mlaznika	390
14.6.4.	Konvergentno-divergentni mlaznik – Lavalov mlaznik	391
14.7.	Strujanje neviskozno gasa sa razmenom toplote	394
14.7.1.	Rejljeva kriva	396
14.8.	Jednodimenzijnsko strujanje gasa sa trenjem	397
14.8.1.	Izotermnsko strujanje gasa u horizontalnom gasovodu	398
14.8.2.	Adijabatsko strujanje gasa	402
14.8.2.1.	Fanove krive	404
15.	LAMINARNI GRANIČNI SLOJ	407
15.1.	Prantlove jednačine	408
15.2.	Integralne karakteristike graničnog sloja	411
15.3.	Laminarni granični sloj na ravnoj ploči bez gradijenta pritiska - Blazijusovo rešenje	412
15.4.	Integralne jednačine graničnog sloja - Karmanova jednačina	416
15.4.1.	Metoda Polhauzena	418
15.4.2.	Laminarni granični sloj na ravnoj ploči bez gradijenta pritiska ...	418
15.4.3.	Laminarni granični sloj na ravnoj ploči sa gradijentom pritiska ..	420
16.	TURBULENTNO STRUJANJE	425
16.1.	Nastajanje turbulentnog strujanja	428
16.2.	Teorija Kolmogorova	429
16.2.1.	Energetski spektar turbulencije	430
16.2.2.	Razmere turbulencije	432
16.3.	Rejnoldsova statistika	436
16.4.	Osrednjene Navije-Stoksove jednačine - Rejnoldsove jednačine	437
16.4.1.	Osrednjena jednačina energije	439
16.5.	Turbulentni naponi	440
16.5.1.	Fizičko tumačenje turbulentnih napona	441
16.5.2.	Intenziteti turbulencije	442
16.5.3.	Prostorno-vremenske korelacije	442

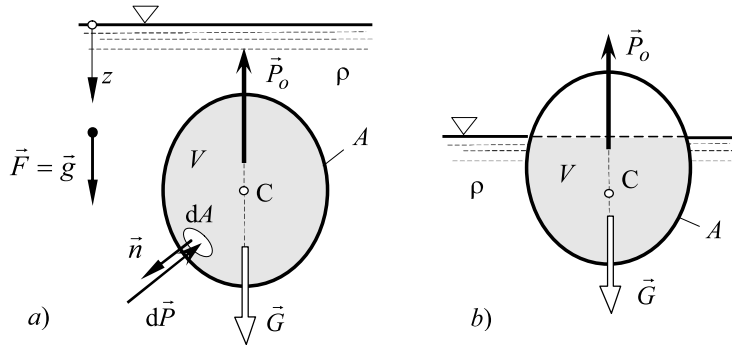
16.6. Modeliranje turbulentnih napona	445
16.6.1. Businesskov model	445
16.6.2. Model putanje mešanja – algebarski modeli turbulencije	447
16.6.3. Model Smagorinski	449
16.6.4. Turbulentna viskoznost mešajućeg sloja	450
16.6.5. Turbulentna termička difuzija	450
16.6.6. Model $k-l$. Model Prantl-Kolmogorov	451
16.6.7. Model $k-\varepsilon$	452
16.6.8. Model $k-\omega$	453
16.7. Turbulentno strujanje u cevima	453
16.7.1. Univerzalni turbulentni profil brzina u hidraulički glatkim cevima ..	455
16.7.2. Zakon deficita brzine	458
16.8. Koeficijent trenja u cevima	459
16.8.1. Prantlova formula – koeficijent trenja za hidraulički glatke cevi ..	460
16.8.2. Blazijusova formula	460
16.8.3. Nikuradzeova formula	
- koeficijent trenja za hidraulički potpuno hrapave cevi	461
16.8.4. Kolbrukova formula	
- koeficijent trenja za hidraulički hrapave cevi	462
16.9. Slodan turbulentni mlaz	463
Indeks pojmova	472

$$\vec{P} = \vec{G} + \vec{P}_N = \rho V \vec{g} + \sum_{i=1}^m p_{mc_i} A_i \vec{n}_i . \quad (2.44)$$

2.9.6. Sila potiska – Arhimedova² sila

U ovom Poglavlju će se definisati sila pritiska koja deluje na telo koje pliva na vodi, ili se nalazi potpuno potopljeno u njoj. Ovde je, dakle, reč o važnoj primeni delovanja sile pritiska na plovne objekte: brodove, čamce, podmornice i sl.

Neka se telo težine G , koje ima zapreminu V , nalazi u tečnosti gustine ρ , Sl. 2.19.a. Radi nalaženja sile pritiska koja deluje na potopljeno telo uzmimo element površine tela dA , sa ortom normale \vec{n} , na koji deluje elementarna sila pritiska: $d\vec{P} = -p \vec{n} dA$. Do rezultujuće sile pritiska dolazi se integraljenjem, ali kako je površina A na koju deluje sila pritiska zatvorena, to možemo sa površinskog preći na zapreminski integral, i tom



Slika 2.19: Telo koja plivaju.

prilikom koristimo Ojlerovu jednačinu: $\rho \vec{F} = \nabla p$ u kojoj je zapreminska sila $|\vec{F}| = \text{const.}$, posle čega sledi:

$$\vec{P}_o = -\oint_A p \vec{n} dA = -\int_V \nabla p dV = -\int_V \rho \vec{F} dV \longrightarrow \boxed{\vec{P}_o = -\rho V \vec{F}} \quad (2.45)$$

Sila pritiska \vec{P}_o koja deluje na potopljeno telo u tečnosti naziva se *sila potiska* ili uopštena Arhimedova sila. U najčešćem slučaju kada se telo nalazi u tečnosti izloženoj samo zapreminskoj sili Zemljine težine, $\vec{F} = \vec{g}$, opšta Arhimedova sila potiska (2.45) se svodi na oblik:

$$\vec{P}_o = -\rho V \vec{g} \longrightarrow P_o = \rho V g . \quad (2.46)$$

² Archimedes (285-212 p.n.e.). Grčki fizičar, matematičar i inženjer. On je kao dvorski naučnik u gradu Sirakuzi dobio zadatak od kralja Hijerona da proveriti da li je kruna koju je kralj naručio od čistog zlata, ili ima primesa i drugih metala. Arhimed je problem rešio slučajno u kadi u kojoj se kupao na osnovu zapažanja da je njegovo telo u vodi lakše za onoliko koliko je težina istisnute vode. Oduševljen, Arhimed je, kako legenda kaže, nag istrčao iz kade na ulice Sirakuze i vikao „Eureka“-„pronašao sam“. Sa današnje tačke gledišta Arhimed je pronašao silu potiska.

U izrazu (2.46) V predstavlja zapreminu tela, ako je telo potopljeno (Sl. 2.19a), ili zapreminu potopljenog dela tela ako telo pliva na tečnosti, kao na Sl. 2.19b. Iz izraza (2.46) zaključuje se da je sila potiska koja deluje na telo jednaka težini istisnute tečnosti i usmerena je vertikalno na gore. Analizom izraza (2.46) sledi važan zaključak da: sila potiska ne zavisi od polja pritiska koje vlada oko tela, tj. ne zavisi od dubine na kojoj se telo nalazi.

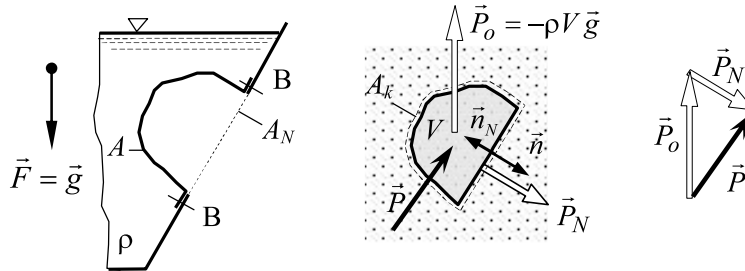
Na telo težine G koje se nalazi u tečnosti deluje sila potiska P_o . Poređenjem ove dve sile, zaključuje se da ako je:

$G = P_o$ - telo pliva na tečnosti, ili u njoj lebdi,

$G > P_o$ - telo tone kroz tečnost, ili

$G < P_o$ - telo izranja iz tečnosti sve dok se ne postigne nova ravnoteža sila $G = P'_o$.

Koristeći silu potiska čitav niz praktičnih problema može jednostavno da se reši. Naime, ako je kriva površ A (Sl. 2.20a) okvašena tečnošću gustine ρ , tada se može izdvojiti karakteristična zapremina V , na čijoj zatvorenoj kontrolnoj površi A_k je sadržana i površina A na koju tražimo silu, i nezavisno posmatrati njena ravnoteža. Tom



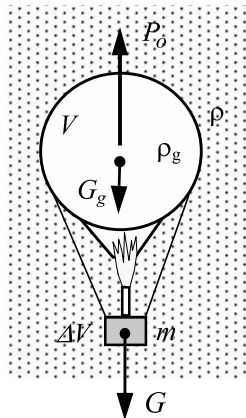
Slika 2.20.

prilikom izdvojena zapremina V ponaša se kao da je telo te zapremine zaronjeno u tečnost. Tada na telo deluje sila potiska $\vec{P}_0 = -\rho V \vec{g}$ i na graničnoj površi A_N normalna sila pritiska $\vec{P}_N = -\int_{A_N} p \vec{n}_N dA$. Tražena rezultujuća sila pritiska je:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\int_A p \vec{n} dA = -\int_A p \vec{n} dA \mp \int_{A_N} p \vec{n} dA = -\oint_A p \vec{n} dA + \int_{A_N} p \vec{n} dA = -\int_V \nabla p dV - \int_{A_N} p \vec{n}_N dA \\ &= -\int_V \rho \vec{g} dV + \vec{P}_N = -\rho V \vec{g} + \vec{P}_N = \vec{P}_0 + \vec{P}_N \end{aligned} \quad (2.47)$$

Zbog uvođenja u račun sile potiska, izloženi postupak se može nazvati *metoda potiska*.

Izraz kojim se definiše sila potiska (2.46) prepoznaje fluid koji se nalazi oko tela kroz gustinu ρ , što znači da će sila potiska delovati ne samo na tela koja se nalaze u tečnostima, već i na tela koja se nalaze okružena gasom. Dakle, na svako telo koje se nalazi u fluidu deluje sila potiska. Radi prikazivanja dejstva sile potiska na telo koje se nalazi u vazduhu, posmatrajmo leteći balon ukupne mase m , zapremine V , u kome se nalazi gas gustine ρ_g , čija je gustina manja od gustine okolnog vazduha ρ ($\rho > \rho_g$). Na balon deluju: sila težine balona $G = mg$, sila težine gasa u balonu G_g , Sl. 2.21. i sila potiska $P_o = \rho g(V + \Delta V)$, gde je ΔV zapremina korpe i propratne opreme koja je



Slika 2.21.

zanemarljivo manja u odnosu na zapreminu balona ($\Delta V \ll V$). Iz jednačine ravnoteže sila:

$$G + G_g = P_o,$$

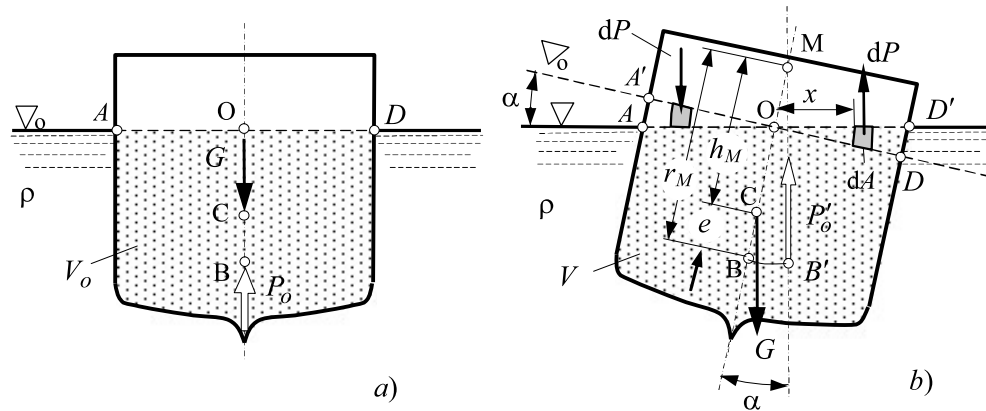
dobija se zapremina balona

$$V = \frac{m}{\rho - \rho_g}$$

u kojoj mora biti gas gustine ρ_g da bi masa m bila u stanju lebdenja. Ovaj princip se koristi pri upotrebi letećih balona i cepelina, s tim da bi se silom potiska mogla savladati sila težine tela potrebno je da je zapremina u kojoj je gas velika, što značajno ograničava primenu.

2.9.7. Stabilnost tela pri plivanju

Posmatrajmo jedan plovni objekat, npr. brod, koji se nalazi u početnom stanju mirovanja prikazanom na Sl. 2.22a. Neka je plovni objekat simetričan u odnosu na vertikalnu osu, i neka je raspored fiksnih masa u njemu takav da se težište C, u kome deluje težina G , nalazi na vertikalnoj osi simetrije. Na telo koje pliva na vodi deluje Arhimedova sila potiska $P_o = \rho g V_o$, gde je V_o potopljena zapremina tela, i njena napadna tačka je u centru potiska-tačka B. Za početno stanje ravnoteže plovog tela važi uslov jednakosti sila težine i potiska: $G = P_o$. Međutim, za stabilnost plovnog objekta nije dovoljno da su vertikalne sile težine i potiska u ravnoteži, i da se njihove napadne tačke C i B nalaze na istoj vertikalnoj liniji, zato je uslov stabilnosti plovnog objekta potrebno posebno obraditi.



Slika 2.22: Stabilnost tela pri plivanju.

Pri plivanju tela slobodna površ tečnosti seče plovni objekat po ravnoj površi (AOD sa Sl.2.22a) koja se naziva *površina plivanja*, kroz koju prolazi uzdužna osa plivanja O koja je normalna na ravan crteža. Neka se usled nekog poremećaja plovni objekat bočno nagne za mali ugao α . Ugao bočnog naginjanja α je ugao između ravni slobodnih površi tečnosti u početnom položaju ravnoteže – ravan ∇_o sa Sl. 2.22a i ravni ∇ u nagnutom

Napisana preko komponenata, u vektorskom i tenzorskom obliku, brzina strujanja je:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_i \vec{e}_i \quad \text{ili} \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}, \quad (3.7)$$

gde su skalarne veličine: $v_i = dx_i / dt$ ($i = x, y, z$) komponente brzine. U stručnoj literaturi se za komponente brzine: v_x , v_y i v_z veoma često koriste oznake: u , v i w , redosledno. Ako je u svakoj tački prostora poznat vektor \vec{v} , i ta vektorska funkcija je neprekidna i diferencijabilna, takvo polje se naziva *vektorsko polje* – u ovom slučaju vektorsko polje brzine. Karakteristike vektorskog polja brzine su vektorska linija polja-strujnica, skalarna veličina $\text{div } \vec{v}$ i vektorska veličina $\text{rot } \vec{v}$. Detaljna analiza teorije skalarnih i vektorskih polja pripada matematičkoj teoriji polja.

U zavisnosti od toga koliko koordinata u brzini (3.7), ili uopšte u fizičkoj veličini $f(x, y, z, t) = \vec{v}, p, \rho, T, \dots$, definiše strujanje, strujanja se dele na:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &\rightarrow \vec{v}(x, y, z, t) && \text{- trodimenzijska,} \\ f(x, y, t) &\rightarrow \vec{v}(x, y, t), \quad \partial f / \partial z = 0, && \text{- dvodimenzijska, i} \\ f(x, t) &\rightarrow \vec{v}(x, t), \quad \partial f / \partial y = 0, \quad \partial f / \partial z = 0 && \text{- jednodimenzijska.} \end{aligned}$$

Za ova strujanja koriste se kraće oznake: 3D, 2D i 1D, redosledno. Primeri navedenih tipova strujanja su brojni. Tako npr. strujanje oko stuba mosta koji se nalazi u reci je trodimenzijsko i nestacionarno; ako jedna dimenzija ne učestvuje u promeni veličina stanja, kao npr. kod morskih talasa koordinata koja je po njihovoj dužini, tada se strujanje smatra dvodimenzijsko; a kod strujanja u cevima merodavna je samo koordinata koja se poklapa sa osom cevi, pa je ovo strujanje jednodimenzijsko. Prednost od ovih podela strujanja je velika, jer se od 3D do 1D strujanja fizičko-matematički modeli pojednostavljuju i analizu čine manje složenom.

3.3. STRUJNO POLJE. STRUJNICA. STRUJNA CEV. STRUJNO VLAKNO.

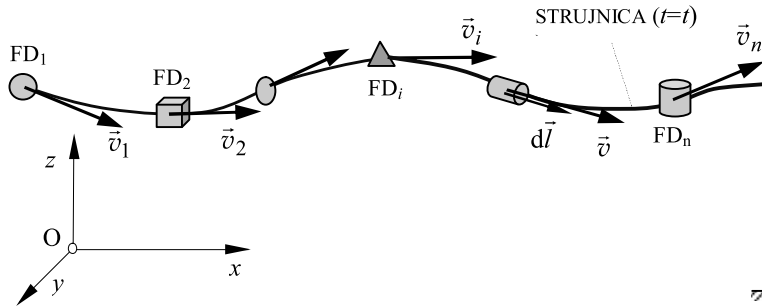
Za poznavanje strujanja potrebno je raspolagati skupom materijlnih veličinama stanja u celom strujnom prostoru: $f(\vec{r}, t) = \vec{v}, p, \rho, T, \dots$. Takvo prostorno polje u kome se u svakoj prostorno-vremenskoj tački $M(\vec{r}, t)$ mogu dodeliti materijalne fizičke skalarne ili vektorske veličine, koje zavise od vektora položaja \vec{r} i vremena t , naziva se *strujno polje*, i ono se sastoji od skalarnog polja pritiska, temperature i gustine fluida, i vektorskog polja brzine. Međutim, u užem smislu reči *pod strujnim poljem podrazumeva se samo vektorsko polje brzine*. Za opisivanje strujanja strujnim poljem, koje odgovara Ojlerovom pristupu, koriste se linije koje se nazivaju strujnice, a potrebno je definisati i strujno vlakno i strujnu cev.

Za definisanje strujnice posmatrajmo jedno strujno polje sa Sl. 3.4a, i to u jednom trenutku vremena, u kome se kreće n različitih fluidnih delića FD_i ($i = 1, \dots, n$).

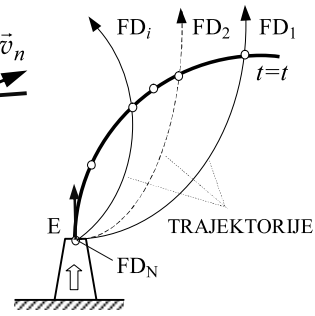
Definicija: Strujnica je prostorno-vremenska vektorska linija polja brzine koja u jednom trenutku vremena spaja različite fluidne deliće, sa osobinom da se u bilo kojoj njenoj tački pravac vektora lokalne brzine poklapa sa pravcem tangente.

Strujnica se još naziva i *strujna linija*. Razlika između trajektorije i strujnice jeste što trajektoriju definiše jedan fluidni delić u različitim vremenskim trenucima, a strujnicu čine različiti fluidni delići u jednom trenutku vremena. Trajektorija može da seče samu

sebe, a strujnica ne može. Naime, kod trajektorije isti fluidni delić može u različitim vremenskim trenucima da se nađe u istoj tački, međutim, ako bi strujnica sekla samu sebe to bi značilo da se u presečnoj tački nalaze dva različita fluidna delića što se kosi sa zakonom o održanju materije. U procesima vizualizacije strujanja ono što u jednom trenutku posmatrač vidi jesu strujnice a ne trajektorije, zato je pojam strujnice veoma važan. Kod stacionarnog strujanja trajektorija fluidnog delića i strujnica se poklapaju. Skup strujnica se naziva *strujno polje*.



Slika 3.4: Strujnica.



Slika 3.5: Emisiona linija.

Vektorskim množenjem kolinearnih vektora brzine \vec{v} i elementa dužine strujnice $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ dobija se diferencijalna jednačina strujnice:

$$\vec{v} \times d\vec{l} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}} \quad (3.8)$$

Jednačina strujnice formalno može se dobiti i jednostavnije. Naime, komponente brzine su $v_i = dx_i/dt$, odakle sledi da je: $dt = dx_i/v_i$, pa se primenom za $i = x, y, z$ direktno dobija jednačina strujnice (3.8). U sistemu jednačina (3.8) samo su dve nezavisne jednačine, čijim se rešavanjem dobija skalarni oblik jednačine strujnice:

$$\psi(x, y, z, t) = \text{const.}$$

iz koga se vidi da su pri nestacionarnom strujanju strujnice nestacionarne prostorne linije.

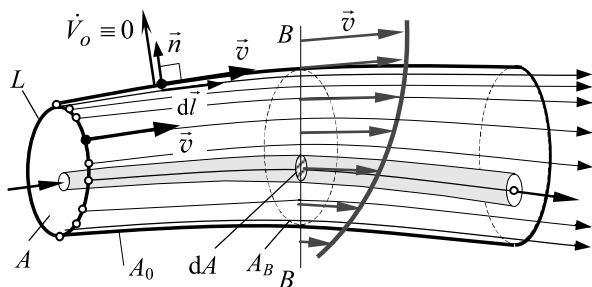
Osim trajektorije i strujnice koristi se i *emisiona linija* (Sl. 3.5), pod kojom se podrazumeva: kriva linija koja u jednom trenutku vremena spaja sve fluidne deliće koji su predhodno prošli kroz istu fiksnu izvornu-emisionu tačku E. Vremenom emisiona linija se produžava. Kod stacionarnog strujanja trajektorija, strujnica i emisiona linija se poklapaju.

U jednom strujnom polju uočimo zatvorenu krivu liniju L koja ograničava površinu A i kroz svaku tačku te krive linije provucimo po jednu strujnicu (Sl. 3.6). Na ovaj način dobijena je površ A_o koja predstavlja omotač jedne cevi. S obzirom na to da je površina omotača sastavljena od strujnica, koje prolaze kroz tačke zatvorene konture, ona se naziva *strujna površ*, a cev koju ona formira naziva se *strujna cev*. Dakle, može se jednostavno kazati: *strujna cev je ona cev čiji omotač čini skup strujnica*. Važna primena strujne cevi jeste ta što u specijalnom slučaju ona može da se primeni na stvarne geometrije cevi i kanala kroz koje se odvija strujanje, s tim da tada omotač strujne cevi predstavlja zid cevi, tj. čvrstu granicu. Važno svojstvo strujne cevi jeste da

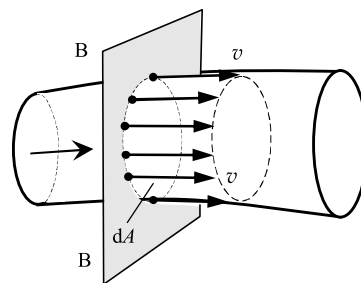
je *protok fluida kroz njen omotač jednak nuli*. Naime, kako je jednačina strujnice $\vec{v} \times d\vec{l} = 0$, a vektor dužine strujnice $d\vec{l}$ ortogonalan na ort \vec{n} normale površine omotača ($d\vec{l} \perp \vec{n}$), to sledi da je skalarni proizvod vektora:

$$d\vec{l} \cdot \vec{n} = 0 \longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$

Član $\vec{v} \cdot \vec{n}$ je sastavni deo izraza za protok fluida, pa ako je on nula onda je i protok fluida kroz omotač strujne cevi jednak nuli ($\dot{V}_o \equiv 0$).



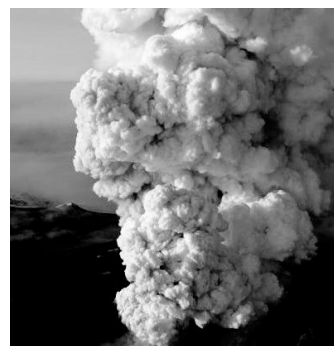
Slika 3.6: Strujna cev.



Sl. 3.7: Strujno vlakno.

U proizvoljno izabranom poprečnom preseku B-B strujne cevi površine A_B sa Sl. 3.6 neka fizička veličina, npr. brzina, je promenljiva, ali ako na površini A_B uočimo elementarnu površinu dA , tada su promene fizičkih veličina na njoj zanemarljivo male tako da se smatraju konstantnim (v. Sl. 3.7). Tada može da se definiše *strujno vlakno* pod kojim se podrazumeva strujna cev elementarno malog poprečnog preseka u kome su sve fizičke veličine konstantne. Ako je strujno vlakno nizstrujno promenljivo tada se i strujne veličine od preseka do preseka menjaju, ali u jednom poprečnom preseku one su konstantne. Prednost od korišćenja strujnog vlakna jeste što strujanje duž njega ima jednodimenzijски karakter, a primenjene jednačine su algebarske.

Do strujnog polja u konkretnom slučaju dolazi se proračunom strujanja. Međutim, već je navedeno da se strujno polje može dobiti vizualizacijom strujanja. Na Sl. 3.8 prikazano je strujno polje skupom strujnica oko automobila dobijeno vizualizacijom strujanja dimom. Najveća laboratorija jeste sama priroda i u njoj se može naići na brojne fascinantne prizore vizualizacije strujnih polja. Tako je na primer na Sl. 3.9

Slika 3.8: Laboratorijska vizualizacija dimom strujanja oko automobila (<http://www.autospeed.com>).

Slika 3.9: Erupcija vulkana Eyjafjallajökull na Islandu 14.04.2010. god.

u kojoj je $\nabla^2 = \Delta = \partial^2 / \partial x_i^2$ Laplasov operator. Jednačina (3.75) se naziva Laplasova diferencijalna jednačina, koja u razvijenom obliku, u Dekartovim koordinatama, glasi:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.76)$$

a u polarno-cilindričnim koordinatama: r, θ i z je:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.77)$$

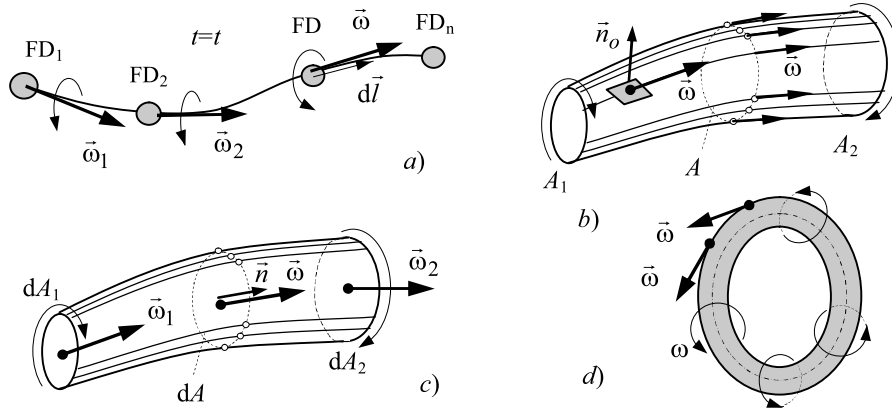
a njena rešenja $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ su harmonijske analitičke funkcije.

3.12. VRTLOŽNA I NEVRTLOŽNA STRUJANJA

Vektor vrtložnosti definisan je izrazom (3.66) kao: $2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. Na osnovu vrednosti vektora vrtložnosti uvodi se kinematska podela strujanja na:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega} = 0 &\rightarrow \text{rot } \vec{v} = 0 - \text{nevtložna strujanja, i} \\ \vec{\omega} \neq 0 &\rightarrow \text{rot } \vec{v} \neq 0 - \text{vrtložna strujanja.} \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Kako se vektor $\vec{\omega}$ odnosi na fluidni delić a ne na fluidni prostor, to se navedena podela odnosi na rotaciju, ili ne, fluidnog delića. S obzirom na to da vrtložnost $\vec{\omega}$ definiše vektorsko polje, to po analogiji sa vektorskim poljem brzine gde postoje: strujnica, strujno vlakno i strujna cev; uvode se pojmovi: vrtložne linije, vrtložnog vlakna i vrtložne cevi.



Sl. 3.26: a) Vrtložna linija, b) vrtložna cev, c) vrtložno vlakno, i d) vrtložni prsten.

Vrtložna linija ili vrtložnica je prostorna vektorska linija vrtložnosti koja u jednom trenutku vremena spaja različite fluidne deliće, sa osobinom da se u bilo kojoj njenoj tački pravac vektora lokalne vrtložnosti poklapa sa pravcem tangente na tu liniju. Jednačina vrtložne linije (v. Sl. 3.26a) je:

$$\vec{\omega} \times d\vec{l} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (3.79)$$

Ako uočimo neku površinu A i kroz svaku tačku zatvorene konture koja ograničava tu površinu provučemo po jednu vrtložnicu dobijamo vrtložnu cev, Sl. 3.26b. Dakle, zid vrtložne cevi čini skup vrtložnih linija. Ako se poprečni presek vrtložne cevi svede na

elementarnu površinu poprečnog preseka dA sa Sl. 3.26c tada se vrtložna cev svodi na vrtložno vlakno, koje se definiše kao: *vrtložno vlakno je vrtložna cev elementarno malog poprečnog preseka sa osobinom da se vektor vrtložnosti u poprečnom preseku ne menja*. Ukoliko je vrtložna cev zatvorena (Sl. 3.26d) tada se ona naziva *vrtložni prsten*. Koristeći definiciju protoka vektora brzine, izraz (3.18), definišu se protoci vektora vrtložnosti kroz vrtložno vlakno i vrtložnu cev, kao:

$$d\dot{V}_{\omega} = \bar{\omega} \cdot \bar{n} dA \quad \longrightarrow \quad \dot{V}_{\omega} = \int_A \bar{\omega} \cdot \bar{n} dA. \quad (3.80)$$

U slučaju da se nalazimo na zidu vrtložne cevi, Sl. 3.26b, protok vektora vrtložnosti je:

$$\dot{V}_{\omega,o} = \int_A \bar{\omega} \cdot \bar{n}_o dA = 0$$

jer su vektori vrtložnosti $\bar{\omega}$ i orta normale \bar{n}_o ortogonalni ($\bar{\omega} \perp \bar{n}_o$), pa važi: $\bar{\omega} \cdot \bar{n}_o = 0$.

U teoriji vektorskih polja poznato je da za neki vektor \bar{v} važi: $\text{div}(\text{rot } \bar{v}) = 0$, pa ako je \bar{v} vektor brzine sledi da je:

$$\text{div}(\text{rot } \bar{v}) = 2 \text{div } \bar{\omega} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{div } \bar{\omega} = \nabla \cdot \bar{\omega} = 0 \quad (3.81)$$

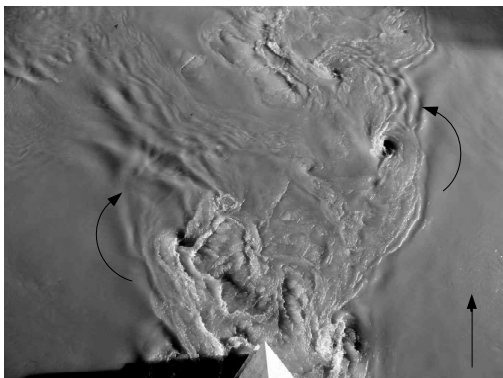
odnosno da je polje vektora vrtložnosti $\bar{\omega}$ solenoidno.



Slika 3.27: Tornado-vrtložna cev.














Slika 3.28: Vrtložne cevi iza aviona.
(<http://www.Airliners.net>)

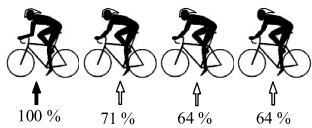
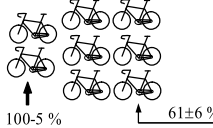






Slika 3.29: Vrtložna struktura viskoznog strujanja iza stuba mosta koji se nalazi na reci Tibar u Rimu.

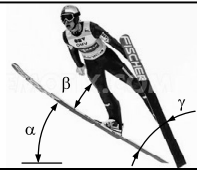
Primeri vrtložnih strujanja u prirodi su brojni i često vidljivi golim okom. Navedimo nekoliko primera vrtložnih strujanja, i to: vrtložnu cev kod tornada (Sl. 3.27) koja predstavlja prirodni fenomen, vrtložne cevi iza krila aviona (Sl. 3.28), i vrtložna struktura strujanja iza stuba mosta u reci (Sl. 3.29).

postigne ili smanjenjem koeficijenta otpora C_D , ili zauzimanjem takvog položaja tela koji daje manju frontalnu površinu A . Na smanjenje koeficijenta otpora ili površine otpora bicikliste utiču faktori: položaj tela, ruku i nogu, geometrija bicikla, oblik kacige, kvalitet odeće i td. Za svakog sportistu ponaosob treba naći optimum između raspoložive snage, aerodinamike i ergonomije, jer ne mora da znači da je najpovoljniji

	Položaj	C_D	$C_D A$ [m ²]
Čovek u stojećem položaju		1,0 ÷ ÷1,3	0,5÷1,04
Biciklista			
Rekreacija, uspravno		1,15	0,632
Amaterska vožnja		1	0,40
Dobro spuštani		0,88	0,317
Potpuno spuštani		0,83	0,299
Sastre (2008)			0,25 ÷ ÷0,26
Indurain (1994)		0,65	0,2441
Obree (1994), supermen pozicija		0,5	0,1720
Boardmann (1996), supermen pozicija		0,55	0,1838
Tandem		0,50	0,18

Biciklista	Položaj	C_D	$C_D A$ [m ²]
Ekipna vožnja			
Vožnja u grupi – peloton			

Skijanje	Položaj	$C_D A$ [m ²]
Skijanje spust		0,16
Skijanje spust		0,20
Skijanje		0,26
Amatersko skijanje - vertikalni položaj		0,29-0,33

Ski skokovi	$C_D(\alpha, \beta, \gamma) = 0,56 \div 1,21$ $A = 0,253 \div 0,367 \text{ m}^2$	
		

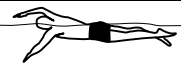

Plivanje		0,58÷1,04
Plivanje - start		0,48

Tabela 6.5: Koeficijent otpora ili površina otpora nekih karakterističnih aerodinamičkih položaja tela u sportskim disciplinama: biciklizmu, skijanju, skijaškim skokovima i plivanju.

aerodinamički položaj konforan pri takmičenju. Treba napomenuti da vrednosti koeficijenata otpora za pojedine sportske položaje bicikliste date u tabeli T 6.5 lako se menjaju za nekoliko procenata promenom položaja tela, ruku, lakata, kolena, nagiba glave, oblika kacige, geometrije bicikla i sl. Oko usamljenog bicikliste strujno polje je najnepovoljnije, što znači da je na čeonj strani povećan pritisak, a iza je vrtložna zona u kojoj je potpritisak-pritisak za 100 do 300 Pa manji od atmosferskog pa čeonj pritisak i potpritisak iza daju sile pritiska istog smera, što jasno povećava deo sile otpora koji potiče od pritiska. Deo sile koji potiče od pritiska je dominantni deo sile otpora, a ukupnu silu otpora dopunski povećava deo koji potiče od viskoznog trenja. U odnosu na usamljenog biciklistu kada je strujno polje najnepovoljnije, i najveća sila otpora, za ekipnu i grupnu vožnju (peloton) strujna slika se menja što utiče na značajno smanjenje sile otpora i uštedu energije biciklista koji su u redovima iza čela grupe. Naime, iza prvog bicikliste formira se vrtložna zona u kojoj je pritisak manji, samim tim biciklisti u grupi su u povoljnijem strujnom polju što utiče na smanjenje sile optora. Zbog promene polja pritiska iza bicikliste na čelu grupe usled prisustva biciklista iza čak i njegov napor se smanjuje do 5% u odnosu na usamljenu vožnju.

6.2.1.5. Aerodinamika automobila – koeficijent otpora automobila

Na telo - motorno vozilo: automobil, kamion ili autobus, koje se kreće kroz fluid, prema izrazu (6.7), deluje ukupna sila koja se razlaže na sile otpora i uzgona:

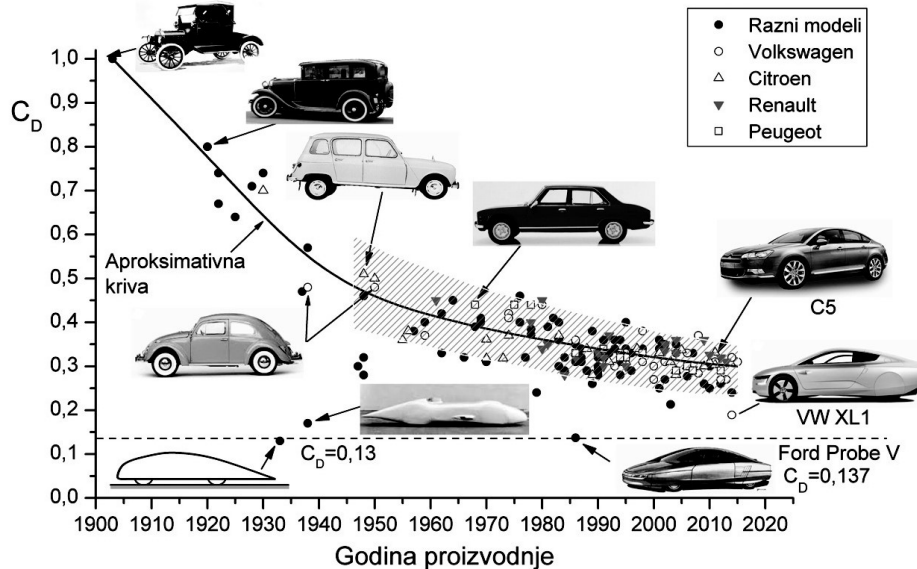
$$\vec{F} = \vec{F}_D + \vec{F}_L .$$

Sila otpora – izraz (6.9) deluje u pravcu kretanja vozila i suprotnog je smera od smera kretanja, a sila uzgona je ortogonalna na nju, i ona može biti usmerena od tla ka vozilu u slučaju standardnih putničkih automobila, ili ka tlu kod trkačkih automobila i formula F1. Snaga aerodinamičkog otpora vozila koje se kreće kroz vazduh brzinom v jednaka je proizvodu sile otpora i brzine kretanja:

$$P = F_D v = C_D A \frac{\rho v^3}{2} ,$$

odakle sledi da je snaga proporcionalna kubu brzine. Za vozila koja se kreću aproksimativno 50÷60 km/h sila aerodinamičkog otpora je približno ista kao i rezultujuća sila trenja, a za veće brzine od ove, što je uobičajeno u drumskom saobraćaju (90÷130 km/h), sila aerodinamičkog otpora vozila je dominantna i najveći deo energije se troši na savladavanje aerodinamičkog otpora. Radi uštede goriva neophodno je smanjiti silu otpora, odnosno koeficijent otpora C_D , ili površinu otpora $C_D A$. Aerodinamički koeficijent otpora vozila - C_D takođe se može shvatiti i kao „mera“ dizajna vozila. Imajući u vidu da je sila aerodinamičkog otpora vozila definisana izrazom (6.6), tj. (6.7), kao integral po celokupnoj površini vozila, to sledi da na koeficijent otpora utiču brojni geometrijski faktori: oblik vozila, retrovizori, branici, blatobrani, izbačena svetla, stabilizatori, krovni nosači, oblik poda, rastojanje od poda do tla i td. Posebno je važan zadnji deo vozila jer se tu formira vrtložna oblast koja ima značajan uticaj na vrednost koeficijenta otpora pa se zato obliku i svim geometrijskim detaljima ovog dela vozila posvećuje dosta istraživačke pažnje. Aerodinamika vozila je posebna disciplina mehanike fluida koja ima za cilj da se za dati tip vozila,

eksperimentalno u aerotunelima ili primenom CFD proračuna, dođe do oblika koji daje manji koeficijent otpora. Eksperimentalna istraživanja automobila, kamiona ili autobusa u aerotunelima obavljaju se ili na maketama ili na samim vozilima.



Slika 6.7: Istorijski trend promene koeficijenta otpora automobila.

Na Sl. 6.7 prikazana je vrednost koeficijenta otpora za standardne oblike putničkih automobila u funkciji od godine prvi put proizvedenog modela. Sa ovog dijagrama se vidi da se u prvim decenijama proizvodnje automobila, osim eksperimentalnim vozilima, o aerodinamici nije vodilo računa. Pravi intenzivan razvoj aerodinamike vozila počinje 70-tih godina XX veka, a zahtevi za ostvarivanjem optimalne geometrije su direktno uticali na novi dizajn vozila i na razvoj novih tehnologija primenjenih u automobilskoj industriji. Različiti tipovi automobila, koji su od istog ili različitih proizvođača, imaju različite vrednosti koeficijenta otpora koje leže u jednom pojasu oko jedne aproksimativne krive koja ovuhvata vrednosti sa $\pm 15\%$. Za aktuelne tipove dobro oblikovanih putničkih automobila, ne računajući eksperimentalne automobile - oblast ispod šrafiranog pojasa, vrednost koeficijenta otpora je $0,28 \div 0,35$, a površine otpora $0,25 \div 0,85 \text{ m}^2$. Kod sportskih automobila osim sile optora takođe je važna i sila uzgona. Sa aspekta sile otpora aerodinamika sportskih automobila je nepovoljnija u odnosu na putničke automobile i koeficijent otpora je veći, a za formule F1 još veći sa vrednostima $0,70 \div 1,1$. Kod sportskih automobila ugrađuju se stabilizatori, ili aeroprofilni, koji imaju za cilj stvaranje negativne sile uzgona koja dopunski povećava prijanjanje vozila na tlo.

Kod drumskih vozila kamiona i autobusa koja su namenjena za transport robe i putnika na velikim rastojanjima aerodinamici vozila se posvećuje posebna pažnja kako bi se ostvario što manji koeficijent otpora i što veća ušteda u potrošnji goriva. U tu svrhu kod celine kamion-prikolica vodi se računa o praktično svim geometrijskim detaljima koji utiču na koeficijent otpora, a tu su posebno interesantni: usmerivač vazduha iznad kabine, rastojanje između kamiona i prikolice koje treba da bude što manje, ugradnja usmerivača vazdušne struje u prostoru između kamiona i prikolice ili na bočnim, ili zadnjoj strani prikolice, oblikovanje donjeg dela prikolice i td. Na Sl. 6.8

$$v_x = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta\right) \quad ; \quad v_y = -v_\infty \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta \quad ,$$

$$v_r = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad ; \quad v_\theta = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad ,$$

sa kojima se određuje intenzitet brzine u tački definisnoj koordinatama r i θ :

$$\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 = \left(\frac{v_x}{v_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{v_\infty}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 2\theta + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \quad . \quad (8.85)$$

Koristeći izraze (5.13) i (8.85) određuje se bezdimenzijsko polje pritiska – koeficijent pritiska na opstrujavanom telu, za $r = R$ i $v_r(R) = 0$:

$$c_p(\theta) = \frac{p - p_\infty}{\rho v_\infty^2 / 2} = 1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2 = 1 - \left[\frac{v_\theta(R)}{v_\infty}\right]^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad . \quad (8.86)$$

Izgled ove trigonometrijske funkcije dat je na Sl. 8.25, s tim da su neke karakteristične vrednosti:

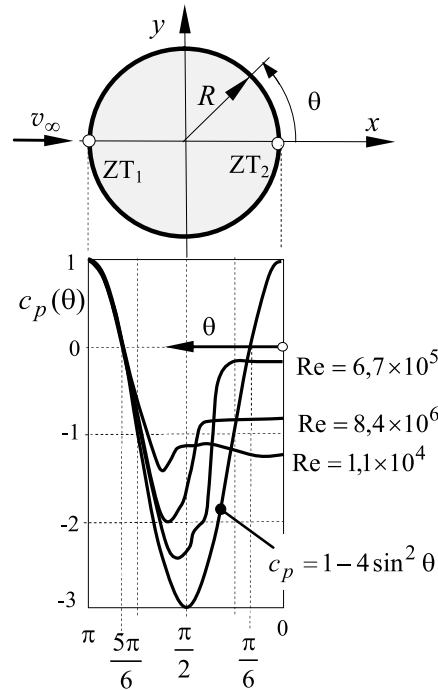
$$c_p(0) = 1 \quad ; \quad c_p(\pi) = 1 \quad , \quad c_p(3\pi/2) = -3$$

a njene nule su za:

$$c_p(\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_1 = \pm \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \theta_2 = \pm \frac{5\pi}{6} \quad ,$$

a kriva $c_p(\theta)$ je simetrična. Teorijski dobijeno bezdimenzijsko polje pritiska (8.86) važi za nevaskozno strujanje fluida oko cilindra. Međutim, kada se u obzir uzme viskoznost fluida, tada dobijeno rešenje važi za $Re < 5$, a za veće vrednosti Rejnoldsovog broja iza opstrujavanog cilindra sa promenom Re broja odstupanja su značajna zbog složenije strukture strujanja koju model nevaskoznog fluida ne može da obuhvati. Na čeonom delu cilindra, u blizini prednje zaustavne tačke, model nevaskoznog fluida daje rezultate kao i model strujanja realnog fluida. Zbog simetričnosti polja pritiska na kružnom cilindru, komponente sile pritiska su:

$$P_x = 0 \quad ; \quad P_y = 0 \quad .$$



Slika 8.25.

Na osnovu dobijenog rezultata sledi da pri potencijalnom acikličnom opstrujavanju kružnog cilindra ne postoji ni sila otpora ni sila uzgona. Nepostojanje sile otpora pri nevaskoznom opstrujavanju tela naziva se D'alambertov (d'Alembert) paradoks.

8.2.13. Opstrujavanje kružnog cilindra sa cirkulacijom

Kada postoji cirkulacija opstrujavanje kružnog cilindra naziva se ciklično opstrujavanje. Neka su dva osnovna strujanja aciklično opstrujavanje kružnog cilindra i

usamljeni vrtlog smešten u koordinatnom početku sa rotacijom u smeru kazaljke na satu, vrednosti cirkulacije $-\Gamma$. Za ova dva strujanja kompleksni potencijali definisani su izrazima (8.81) i (8.56a), pa se metodom superpozicije dobija kompleksni potencijal rezultujućeg strujanja:

$$w(z) = w_1 + w_2 = v_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (8.87)$$

Transformacijom ovog izraza na oblik:

$$w(r, \theta) = v_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i \left[v_\infty r \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right]$$

određuju se potencijal brzine i strujna funkcija:

$$\varphi(r, \theta) = v_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad ; \quad \psi(r, \theta) = v_\infty r \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (8.88)$$

Posmatrajmo specijalnu strujnicu $\psi(r, \theta) = \text{const.}$ koja predstavlja zatvorenu krivu liniju – krug poluprečnika $r = R$, čija je jednačina: $(\Gamma / 2\pi) \ln R = \text{const.}$ Iz (8.87) dobija se kompleksna brzina:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{dw}{dz} = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = \\ &= v_\infty \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\theta \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \sin \theta + i \left[v_\infty \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (8.89)$$

i njene komponente su u pravouglim koordinatama:

$$v_x = v_\infty \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos 2\theta \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \sin \theta \quad ; \quad v_y = v_\infty \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \cos \theta.$$

ili u polarnim koordinatama:

$$v_r = v_\infty \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \cos \theta \quad ; \quad v_\theta = -v_\infty \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}. \quad (8.90)$$

U graničnom slučaju kada $z \rightarrow \infty$, iz (8.89) se vidi da brzina strujanja teži brzini v_∞ neporemećene pravolinijske horizontalne jednolike struje. Da bi odredili položaje zaustavnih tačaka na cilindru definisane uglovima: $\theta_{ZT} = -\beta$ i $\theta_{ZT} = \pi + \beta$ koristi se obimska komponenta brzine: $v_\theta(R, \beta) = 0$, pa iz (8.90), sledi da važi:

$$\sin \beta = \Gamma / 4 R \pi v_\infty, \quad (8.91)$$

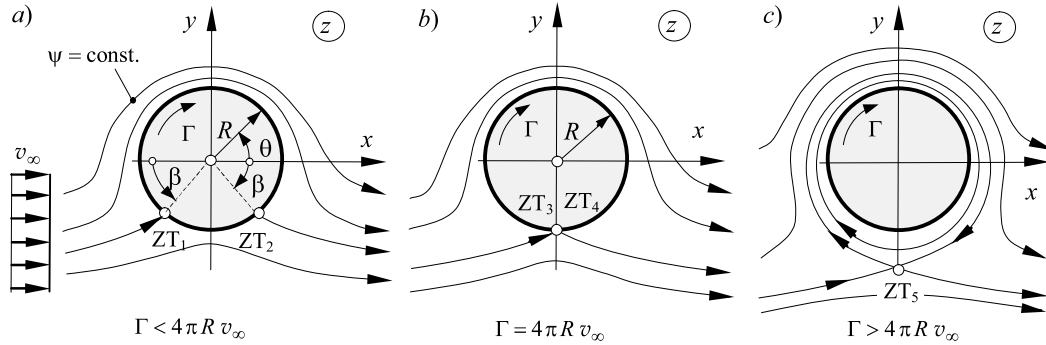
ili iz (8.89) za $\bar{v} = 0$ sledi kvadratna jednačina:

$$z^2 + i \frac{\Gamma}{2\pi v_\infty} z - R^2 = 0$$

čija su rešenja:

$$z_{1,2} = -i \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \right)^2}.$$

Gde se nalaze zaustavne tačke zavisi od vrednosti cirkulacije, tj. diskriminante: $\Delta = R^2 - (\Gamma / 4\pi v_\infty)^2$, i u tom smislu razlikuju se tri moguća slučaja:



Slika 8.26: Ciklično opstrujavanje kružnog cilindra.

a) Kada je diskriminanta pozitivna: $\Delta > 0$, tada je cirkulacija $\Gamma < 4\pi R v_\infty$, zaustavne tačke ZT_1 i ZT_2 se nalaze na cilindru i određene su kao:

$$z_1 = -i \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2} ; \quad z_2 = -i \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2} .$$

i one su simetrično raspoređene u odnosu na y osu definisane uglom $\beta = \arcsin(\Gamma / 4\pi R v_\infty)$. Strujna slika koja se odnosi na ovo ciklično opstrujavanje kružnog cilindra prikazana je na Sl. 8.26a i ona je simetrična u odnosu na y osu. Ako bi vrednost cirkulacije rasla položaj zaustavnih tačaka na telu bi se menjao, i u specijalnom slučaju kada cirkulacija dostigne vrednost $\Gamma = 4\pi R v_\infty$ zaustavne tačke ZT_1 i ZT_2 slile bi se u dvostruku zaustavnu tačku ZT_3 sa Sl. 8.26b (slučaj b).

b) Ako je $\Delta = 0$, tada je cirkulacija:

$$\Gamma = 4\pi R v_\infty , \quad (8.92)$$

a na cilindru postoje dve zaustavne tačke koje se poklapaju ($ZT_3 = ZT_4$) i koje leže na y osi u tačkama $z_{3,4} = -i\Gamma / 4\pi v_\infty$, sa koordinatama: $x_{3,4} = 0$ i $y_{3,4} = -\Gamma / 4\pi v_\infty$. U ovom slučaju strujna slika izgleda kao na Sl. 8.26b.

c) Za vrednost cirkulacije $\Gamma > 4\pi R v_\infty$ diskriminanta je negativna $\Delta < 0$, a rešenja su kompleksni brojevi:

$$z_5 = -i \left[\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} + \sqrt{\left| R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2 \right|} \right] ; \quad z_6 = -i \left[\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} - \sqrt{\left| R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2 \right|} \right] .$$

Obe zaustavne tačke se nalaze na negativnom delu y ose: ZT_6 unutar kruga, pa zato njen položaj nije interesantan pri daljoj analizi; i ZT_5 je van kruga. Strujna slika koja se odnosi na ovaj slučaj strujanja data je na Sl. 8.26c.

Dobijena rešenja cikličnog opstrujavanja cilindra su za negativnu vrednost cirkulacije ($\Gamma < 0$), međutim, ako je cirkulacija pozitivna ($\Gamma > 0$) tada se kao rešenje dobija identična strujna slika kao na Sl. 8.26c, ali simetrično zarotirana oko x -ose. U specijalnom slučaju kada nema cirkulacije ($\Gamma = 0$) tada se dobija da su zaustavne tačke: $z_{1,2} = \pm R$ što odgovara acikličnom opstrujavanju kružnog cilindra – Poglavlje 8.2.12.

Na površini opstrujavanog cilindra je $r = R$, komponente brzine prema (8.90) su:

d) Aeroprofil Žukovskog

Osnovna ideja Žukovskog jeste da se ciklično strujanje oko kružnog cilindra iskoristi za definisanje oblika aeroprofila. U teoriji aeroprofila ova ideja ima fundamentalni značaj, jer se po prvi put do oblika aeroprofila došlo na elegantan matematički način metodom konformnog preslikavanja uz primenu transformacije Žukovskog. Tom prilikom u ravni ζ u odnosu na koordinatni početak centar kruga je u opštem slučaju smešten u tački $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 = -\varepsilon + i\delta$, gde su ekscentriciteti $\xi_0 = -\varepsilon$ i $\eta_0 = \delta$, i krug prolazi samo kroz jednu singularnu tačku. Pri preslikavanju kruga poluprečnika R iz ravni ζ u fizičku ravan z dobija se aeroprofil, odnosno cela gama aeroprofila Žukovskog čiji oblik prvenstveno zavisi od parametara transformacije: R , c , ε i δ . Svi ti oblici mogu se podeliti u dve grupe - simetrični i nesimetrični profili Žukovskog.

d.1) Simetrični aeroprofil Žukovskog

U ravni ζ posmatrajmo krug ($R > c$), čiji se centar nalazi na ξ osi na rastojanju $\xi_0 = -\varepsilon$, odnosno u tački: $\zeta_0 = -\varepsilon$, Sl. 8.36, poluprečnika $R = c + \varepsilon$, koji prolazi kroz tačku $\xi = c$ na ξ osi, i ima jednačinu: $(\xi - \varepsilon)^2 + \eta^2 = R^2$. Bilo koja tačka na krugu određena je kompleksnom promenljivom:

$$\zeta = -\varepsilon + R e^{i\theta}.$$

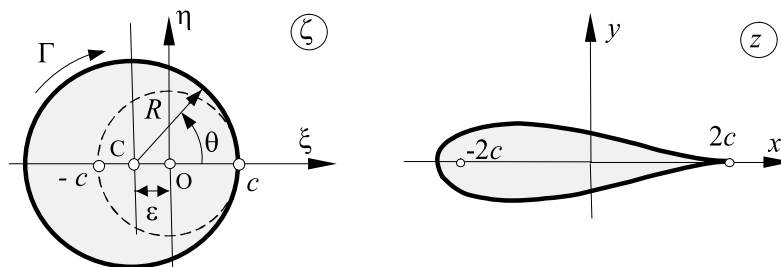
Iz transformacije Žukovskog:

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} = -\varepsilon + R e^{i\theta} + \frac{c^2}{-\varepsilon + R e^{i\theta}} = \dots = x + i y$$

određuju se koordinate profila u fizičkoj ravni:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R \cos \theta - \varepsilon) \left[1 + \frac{c^2}{(R \cos \theta - \varepsilon)^2 + R^2 \sin^2 \theta} \right], \\ y &= R \sin \theta \left[1 - \frac{c^2}{(R \cos \theta - \varepsilon)^2 + R^2 \sin^2 \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.120)$$

Dobijeni profil (8.118) u ravni z je simetričan, Sl. 8.36, i naziva se simetrični aeroprofil Žukovskog. Konkretni profil se dobija za $R \geq 1$, ali blisko jedinici, i za ε koje iznosi nekoliko procenata od R .



Slika 8.36: Simetrični profil Žukovskog.

d.2) Nesimetrični aeroprofil Žukovskog

U ravni ζ sa Sl. 8.37 posmatrajmo krug $R > c$, čiji se centar nalazi u tački $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 = -\varepsilon + i\delta$, gde su ekscentriciteti $\xi_0 = -\varepsilon$ i $\eta_0 = \delta$, i koji prolazi kroz tačku $\zeta = c$ na ξ osi. Jednačina ovog kruga je:

$$(\xi - \varepsilon)^2 + (\eta + \delta)^2 = R^2 \quad ; \quad R = \sqrt{(c + \varepsilon)^2 + \delta^2} ,$$

a bilo koja tačka na njemu određena je kompleksnom promenljivom:

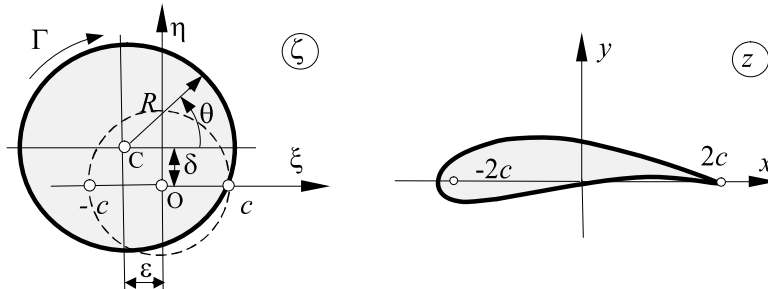
$$\zeta = \zeta_0 + R e^{i\theta} = -\varepsilon + i\delta + R e^{i\theta} .$$

Sa ovom kompleksnom promenljivom iz transformacije Žukovskog:

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} = -\varepsilon + i\delta + R e^{i\theta} + \frac{c^2}{-\varepsilon + i\delta + R e^{i\theta}} = \dots = x + i y ,$$

određuju se koordinate profila u fizičkoj ravni:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R \cos \theta - \varepsilon) \left[1 + \frac{c^2}{(R \cos \theta - \varepsilon)^2 + (R \sin \theta + \delta)^2} \right] , \\ y &= (R \sin \theta + \delta) \left[1 - \frac{c^2}{(R \cos \theta - \varepsilon)^2 + (R \sin \theta + \delta)^2} \right] . \end{aligned} \right\} \quad (8.121)$$



Slika 8.37: Nesimetrični profil Žukovskog.

Jednačine (8.121) definišu nesimetrični profil Žukovskog i one imaju opšti karakter, a iz njih se u specijalnim slučajevima dobija da se iz ravni ζ krug poluprečnika R u ravan z preslikava u:

- a) ravnu ploču dužine $4R$, za: $R = c$, $\varepsilon = 0$ i $\delta = 0$;
- b) u eliptički cilindar, za: $R > c$, $\varepsilon = 0$ i $\delta = 0$;
- c) kružni isečak, za: $R > c$, $\varepsilon = 0$ i $\delta > 0$;
- d) simetrični profil Žukovskog, za: $R > c$, $\varepsilon > 0$ i $\delta = 0$.

d.3) Približno određivanje aeroprofila Žukovskog

Posmatrajmo ciklično opstrujavanje kružnog cilindra poluprečnika R , ali za razliku od onog sa Sl. 8.37, neka je cirkulacija pozitivna ($\Gamma > 0$), što znači da će u odnosu na Sl. 8.37 crtež kruga biti kao u ogledalu-simetričan u odnosu na vertikalnu osu (v. Sl. 8.38). Prema tome, centar kruga smešten je u tački $\zeta_0 = \varepsilon + i\delta$. U ravni ζ proizvoljna tačka M na krugu definisana je kompleksnim potencijalom: $\zeta = r e^{i\theta}$, a radijus r je

u kome je $Re = v_s D / \nu$ - Reynoldsov broj. Primenom izraza (9.27) Darsijeva formula se može napisati i kao:

$$\Delta p = \rho \lambda \frac{l}{D} \frac{v_s^2}{2} = \frac{32 \eta l}{D^2} v_s = \frac{128}{\pi} \frac{\eta l}{D^4} \dot{V}$$

odakle se vidi da je pad pritiska pri laminarnom strujanju u kružnoj cevi linearno proporcionalan srednjoj brzini strujanja ili protoku.

Polazeći od profila brzina (9.24) i izraza (3.68) komponente vrtložnosti fluidnog delića su:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_r = 0, \quad \omega = \omega_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{v_{\max}}{R^2} r.$$

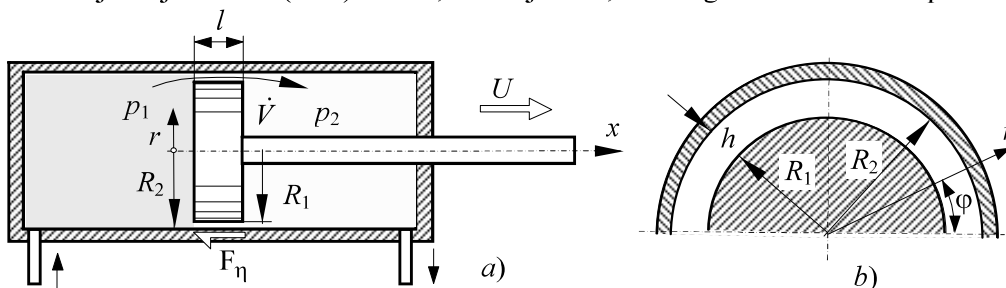
Dakle, i ovde se potvrđuje da je laminarno strujanje vrtložno i da je raspored vrtložnosti u poprečnom preseku cevi linearan, i da je maksimalna vrtložnost na zidu, za $r = R$ i iznosi: $\omega_{\max} = v_{\max} / R$, pa je raspored vrtložnosti definisan kao:

$$\omega = \frac{v_{\max}}{R^2} r = \omega_{\max} \frac{r}{R}$$

i prikazan je na Sl. 9.5. Koristeći jednačinu vrtložnih linija (3.79) lako je pokazati da su vrtložnice koncentrični krugovi $r = \text{const}$.

9.3. Laminarno strujanje u koncentričnom kružnom procepu

U inženjerskoj primeni postoje brojni slučajevi kada se kroz cilindričnu cev poluprečnika R_2 kreće neko cilindrično telo - klip poluprečnika R_1 konstantnom translatorskom brzinom U (Sl. 9.6a). Tada je strujni prostor između klipa i cilindra koncentrični prsten visine $h = R_2 - R_1$ (Sl. 9.6b). U većini primena ovaj procep jeste mali, ali ipak dovoljno veliki da se fluid u njemu smatra neprekidnom sredinom. Ispred i iza klipa dužine l vladaju pritisci p_1 i p_2 ($p_1 > p_2$), pa će se stacionarno strujanje kroz koncentrični kružni procep protokom \dot{V} uspostaviti usled prisutnosti dva efekta – kretanja klipa brzinom U i razlikom pritiska $\Delta p = p_1 - p_2$. Ovo strujanje se razmatra u polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu $r-\varphi-x$, i za njega važe iste pretpostavke kao i za laminarno strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka (Poglavlje 9.3), pa i iste jednačine kretanja i kontinuiteta (9.12-14), i njihova transformacija na obične diferencijalne jednačine (9.19). Dakle, na ovaj način, uz iste granične uslove za pritisak,



Slika 9.6: Laminarno strujanje kroz koncentrični kružni presek

dobija se i isto rešenje za polje pritiska u kružnom akoaksijalnom prstenu:

$$p(x) = p_1 - \Delta p \frac{x}{l} \quad (9.22)$$

i opšte rešenje za brzinsko polje:

$$v(r) = -\frac{K}{4\eta} r^2 + C_1 \ln r + C_2 . \quad (9.23)$$

U odnosu na kružnu cev, ovde će biti drugačiji granični uslovi za brzinu, i oni glase:

$$r = R_1 : v(R_1) = U \quad ; \quad r = R_2 \quad v(R_2) = 0 ,$$

tako da se njihovom primenom nad (9.23) određuju konstante integraljenja:

$$C_1 = \frac{U - \frac{K}{4\eta}(R_2^2 - R_1^2)}{\ln(R_1/R_2)} \quad ; \quad C_2 = -U \frac{\ln R_2}{\ln(R_1/R_2)} + \frac{K R_1^2}{4\eta} \left[1 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2} \frac{\ln R_1}{\ln(R_1/R_2)} \right]$$

pa konačno rešenje za brzinsko polje u kružnom procepu je:

$$v(r) = \frac{U}{\ln(R_1/R_2)} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{K R_1^2}{4\eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 \ln(R_1/R_2)} \ln \frac{r}{R_1} \right] . \quad (9.28)$$

Sa ovim profilom brzina zapreminski protok fluida kroz procep je:

$$\dot{V} = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} v(r) r dr = \pi U \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - R_1^2 \right) + \frac{\pi \Delta p R_1^2}{8\eta l} (R_2^2 - R_1^2) \left(R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right) . \quad (9.29)$$

Zapreminski protok može da se odrediti i kao: $\dot{V} = \pi(R_2^2 - R_1^2)v_s$, to sledi da je srednja brzina strujanja u kružnom koaksijalnom procepu:

$$v_s = U \left[\frac{1}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} - \frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 1} \right] + \frac{\Delta p R_1^2}{8\eta l} \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + 1 - \frac{R_2^2/R_1^2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right] . \quad (9.30)$$

Uvrstimo u izraz (9.30) pad pritiska preko Darsijeve formule:

$$\Delta p = \rho \lambda \frac{l}{D_H} \frac{v_s^2}{2} \quad ; \quad D_H = 2(R_2 - R_1)$$

gde je $D_H = 4A/O$ hidraulički prečnik prstenastog procepa, i koristimo bezdimenzijski geometrijski parametar $n = R_1/R_2$, dobijamo izraz za koeficijent trenja:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \frac{(1-n)^2 \ln n}{1-n^2 + (1+n^2) \ln n} \left[1 + \frac{U}{v_s} \frac{1-n^2 + 2n^2 \ln n}{2(1-n^2) \ln n} \right] , \quad (9.31)$$

koji zavisi od Rejnoldsovog broja: $\text{Re} = v_s D_H / \nu$ i odnosa brzina U/v_s . Na osnovu profila brzina (9.28) viskozni napon na pokretnom klipu je:

$$\tau_w = \eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r=R_1} = \frac{\eta}{R_1} \left[\frac{U}{\ln n} - \frac{\Delta p R_1^2}{4\eta l} \left(2 + \frac{1-n^2}{n^2 \ln n} \right) \right] ,$$

tako da je sila viskoznog otpora koja deluje na klip:

$$F_{\eta} = -\tau_w 2R_1 \pi l = \Delta p R_1^2 \pi \left[1 - \frac{R_2^2 / R_1^2 - 1}{2 \ln R_2 / R_1} \right] + \frac{2\eta \pi l}{\ln R_2 / R_1} U . \quad (9.32)$$

Iz rezultata (9.28) i (9.31) lako je dobiti rešenja za brzinsko polje i koeficijent trenja, u slučaju kada klip miruje ($U = 0$):

$$v(r) = \frac{\Delta p R_1^2}{4\eta l} \left[1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 \ln(R_1 / R_2)} \ln \frac{r}{R_1} \right] ; \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \frac{(1-n)^2 \ln n}{1-n^2 + (1+n^2) \ln n}$$

i u slučaju kada nema klipa: $R_1 \rightarrow 0$ tada $n \rightarrow 0$ rešenje se svodi na laminarno strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka, izrazi (9.24) i (9.27):

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R_2^2 - r^2) ; \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}} .$$

9.4. Laminarno opstrujavanje sfere - Stoksovo rešenje

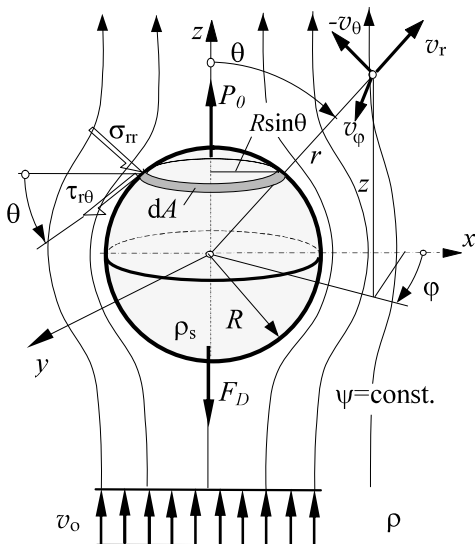
Posmatra se usamljena sfera poluprečnika $R = d/2$ sa Sl. 9.7 koja se opstrujava viskozim fluidom sa relativnom brzinom neporemećene struje v_o . Zahvaljujući

uvođenju relativne brzine v_o istovremeno se tretiraju različiti slučajevi: a) kada fluid miruje a sferna čestica se kreće kroz fluid konstantnom brzinom v_o ; b) kada sferna čestica miruje-lebdi u fluidu koji je opstrujava brzinom v_o ; c) ili ako se fluid kreće brzinom v_f a čestica u istom pravcu brzinom u_s tada je relativna brzina $v_o = v_f - u_s$ ako se fluid i čestice kreću u istom, ili $v_o = v_f + u_s$ u suprotnom smeru. U nekoj tački strujnog prostora definisanoj Dekartovim x, y i z ili sfernim r, φ i θ koordinatama:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

brzina strujanja je:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_r \vec{n}_r + v_\varphi \vec{n}_\varphi + v_\theta \vec{n}_\theta .$$



Slika 9.7: Opstrujavanje sfere

Neka je strujanje nestišljivo, izotermno ($T = \text{const.}, \eta = \text{const.}$), stacionarno ($\partial/\partial t = 0$), osnosimetrično ($v_\varphi = 0, \partial/\partial \varphi = 0$) i neka su zapreminske sile zanemarljivo male. Za ovo strujanje, a prema teoriji sličnosti (Poglavlje 5.1.1), bezdimenzijski oblik Navije-Stoksovih jednačina (5.29) svodi se na:

$$\text{Re} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\text{Eu Re} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial \tilde{x}_j} \quad (9.33)$$

gde su:

9.5. Nestacionarno laminarno strujanje iznad ravne ploče – slična rešenja – Prvi Stoksov problem

Neka beskonačno dugačka ravna ploča miruje i iznad nje nalazi se nestišljivi fluid gustine ρ i viskoznosti ν , Sl. 9.8a. U početnom trenutku vremena ploča se trenutno pokrene konstantnom brzinom U (Sl. 9.8b) a fluid iznad ploče struji nestacionarno, i pri tome sve strujnice su paralelne sa x osom. To nestacionarno laminarno strujanje fluida iznad ravne ploče naziva se *prvi Stoksov problem*, ili *Rejljev problem*. Ovo strujanje je ravansko: $\partial f / \partial z = 0$ ($f = p, v, \dots$), jednodirekcijsko:

$$v_x(x, t) = v, \quad v_y = v_z = 0.$$

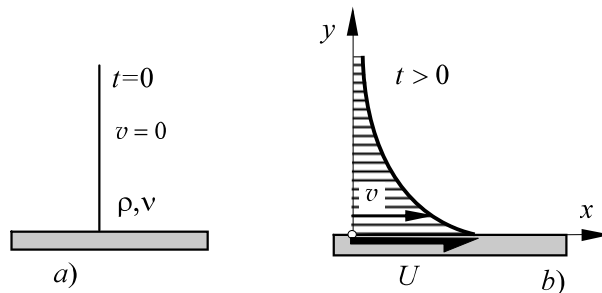
i mogu se zanemariti zapreminske sile. Sa ovim pretpostavkama sistem Navije-Stoksovih jednačina i jednačine kontinuiteta svodi se na oblik:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad ; \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (9.52), (9.53), (9.54)$$

Iz (9.53) sledi da je pritisak $p(x, t)$, a iz (9.54) da je brzina $v(y, t)$. S obzirom na to da spoljašnje strujanje nema gradijent pritiska $\partial p / \partial x = 0$, to pritisak ne zavisi od x koordinate, pa se jednačina kretanja (9.52) svodi na oblik:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (9.55)$$

Parcijalna diferencijalna jednačina (9.55) je analogna sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama koje opisuju probleme difuzije, ili nestacionarnog prenosa toplote.



Slika 9.8.

Potražimo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine (9.55) u formi *sličnih rešenja*. **Metoda uopštene sličnosti** kojom se dobijaju tzv. *slična rešenja* bazirana je na ideji da se funkcija brzine od dve promenljive - $v(y, t)$ predstavi kao funkcija jedne promenljive:

$$v(y, t) = v(\eta) = f(\eta) U \quad (9.56)$$

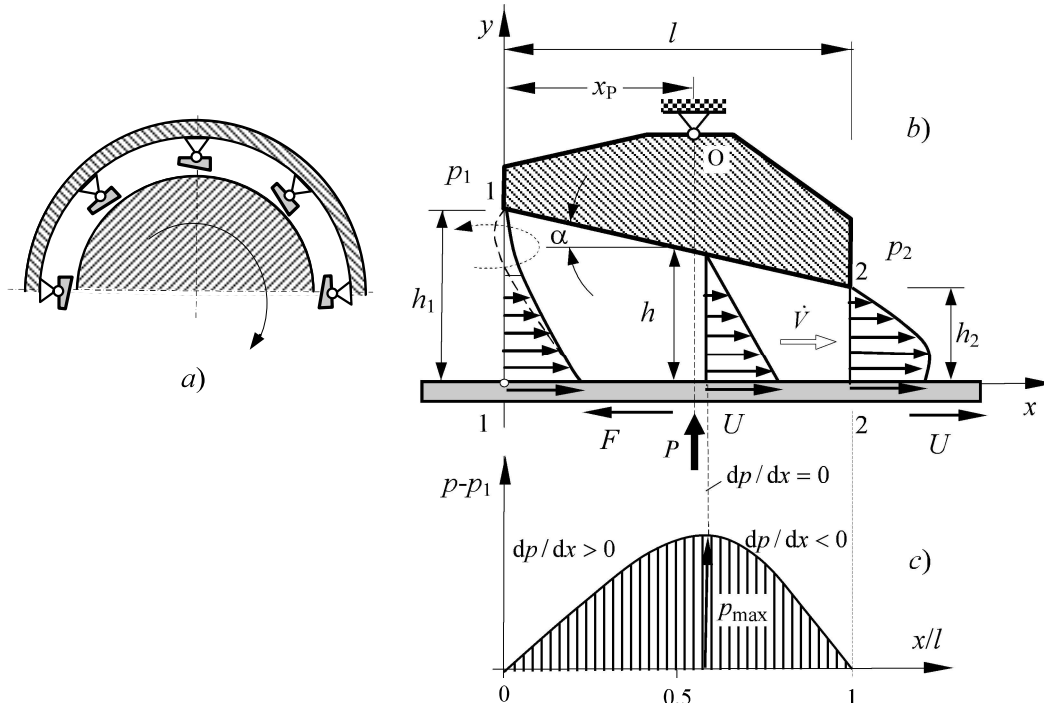
gde je $\eta(y, t)$ nova nepoznata promenljiva – tzv. promenljiva sličnosti, a bezdimenzijska funkcija $f(\eta)$ zamenjuje brzinu strujanja, tako da se parcijalna diferencijalna jednačina (9.55) transformiše na običnu diferencijalnu jednačinu. Sa izrazom (9.56) pojedini parcijalni izvodi jednačine (9.55) su:

9.8. Osnove hidrodinamičke teorije podmazivanja – klizni ležaj

U inženjerskoj praksi realna je potreba da se izvrši podmazivanje između pokretnog i nepokretnog dela i tom prilikom potrebno je ostvariti odgovarajuću nosivost ležaja. To može da se ostvari hidrodinamičkim podmazivanjem primenom tzv. "uljnog klina", ili filma fluida, prikazanog na Sl. 9.14a, koji se dobro aproksimira ravanskim tankim slojem - klinom sa Sl. 9.14b, a takav ležaj se naziva *klizni*. Jedna od važnih primena kliznih ležajeva jeste kada je potrebno ostvariti veliku silu nosivosti u ležaju, kao što je to npr. na vratilima hidrauličkih turbina kada se po obimu vratila velikog prečnika ugrađuje veći broj kliznih ležajeva, pa je potpuno opravdano smatrati da je reč o ravanskom kliznom ležaju. Približna teorija koja je za ove namene razvijena naziva se *hidrodinamička teorija podmazivanja* ili *Rejnoldsova teorija* (iz 1886. god), i zahvaljujući njoj mogu se odrediti polje pritiska i brzinsko polje u sloju za podmazivanje promenljivog preseka. Posmatrajmo jedno ravansko strujanje sa Sl. 9.14b gde se jedan ravni zid kreće konstantnom brzinom U , a drugi zid dužine l je nepokretan i nagnut pod uglom α . Prostor u kome se odvija strujanje jeste linearno konvergentan i opisan jednačinom:

$$h(x) = h_1 - (h_1 - h_2) \frac{x}{l}, \quad (9.81)$$

gde su h_1 i h_2 ulazna i izlazna visina sloja fluida. Neka je strujanje: nestišljivo,



Slika 9.14: Hidrodinamički klizni ležaj.

stacionarno, izotermno i ravansko. Koristimo pretpostavke: da je ugao nagiba mali $\alpha \approx \text{tg} \alpha = (h_1 - h_2)/l$ i da je debljina sloj h mnogo manja od dužine ležaja l , a njihov odnos je mali parametar: $\varepsilon = h/l \ll 1$, pa se zadovoljavanjem jednačine kontinuiteta

$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$, dobija da je brzina u podužnom pravcu mnogo veća od brzine u poprečnom pravcu: $v_x \gg v_y$, a samim tim ostaje samo podužna brzina $v_x = v$. Sa ovim pretpostavkama jednačine kretanja fluida i kontinuiteta (9.1)-(9.3) svode se na obične diferencijalne jednačine (9.4):

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2 v}{dy^2} = -K(x) . \quad (9.4)$$

Iz druge od diferencijalnih jednačina (9.4) dobija se opšte rešenje za brzinsko polje:

$$v(y) = -\frac{K}{2\eta} y^2 + C_1 y + C_2 . \quad (9.6)$$

Primenom graničnih uslova:

$$1) \quad y = 0, \quad v(0) = U, \quad 2) \quad y = h, \quad v = 0$$

određuju se konstante integraljenja:

$$C_1 = \frac{K h}{2\eta} - \frac{U}{h} \quad ; \quad C_2 = U$$

sa kojima se dobija rešenje za brzinsko polje:

$$\frac{v(y)}{U} = -\frac{K}{2\eta U} y^2 + \left(\frac{K h^2}{2\eta U} - 1 \right) \frac{y}{h} + 1 . \quad (9.82)$$

Ovaj profil brzina nizstujno je promenljiv u funkciji od vrednosti gradijenta pritiska $K(x) = -dp/dx$, pa je na ulazu u kanal za $dp/dx > 0$ strujanje sporije, čak je moguća i pojava povratnog strujanja, da bi nizstujno u nekom preseku gradijent pritiska bio $dp/dx = 0$ a prema (9.82) profil brzina linearan: $v/U = 1 - y/h$, i na dalje prema izlazu iz kanala je $dp/dx < 0$ a fluidna struja se ubrzava. Za stacionarno strujanje u kanalu jedinični zapreminski protok fluida određen je izrazom:

$$\dot{V} = \int_0^h v(y) 1 \cdot dy = \frac{Uh}{2} \left(\frac{K h^2}{6\eta U} + 1 \right) .$$

S obzirom da je protok konstantan ($\dot{V} = \text{const.}$), i da je visina kanala $h(x)$ to sledi da je koeficijent K funkcija od podužne koordinate:

$$-\frac{dp}{dx} = K(x) = 6\eta U \left(\frac{2\dot{V}}{U} \frac{1}{h^3} - \frac{1}{h^2} \right) . \quad (9.83)$$

Jednačina (9.83) poznata je kao Rejnoldsova jednačina hidrodinamičke teorije podmazivanja za podmazujući sloj promenljivog poprečnog preseka, tačnije radi se o njenom elementarnom obliku, i iz nje se integraljenjem dobija polje pritiska:

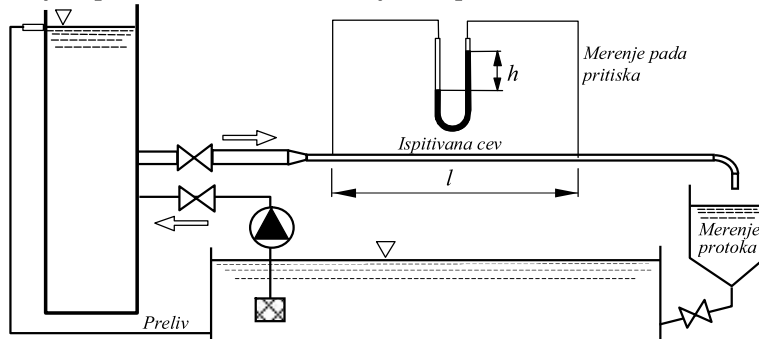
$$\int_{p_1}^{p(x)} dp = -\int_0^x K(x) dx \quad \longrightarrow \quad p(x) = p_1 - \frac{6\eta U l}{h_1 - h_2} \left(\frac{\dot{V}}{U} \frac{h_1 + h}{h_1 h} - 1 \right) \frac{h_1 - h}{h_1 h} , \quad (9.84)$$

a njegov grafički prikaz dat je na Sl. 9.14c. Koristeći granični uslov za pritisak:

$$x = l \quad ; \quad p(l) = p_2$$

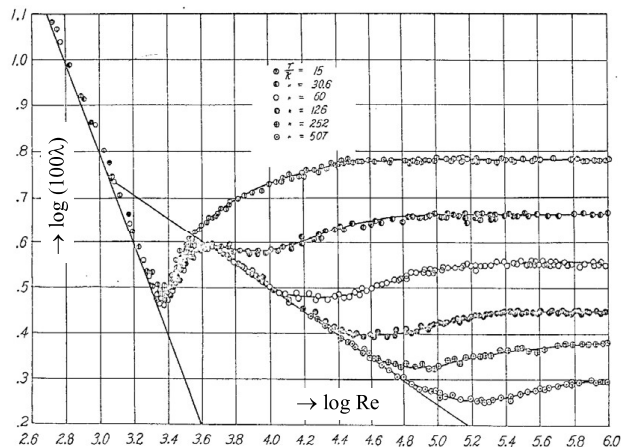
iz izraza (9.84) dobija se zapreminski protok:

dijagram nije operativan za primenu, jer važi za homogenu hrapavost cevi. U praksi se koriste industrijski proizvedene cevi kod kojih hrapavost zida cevi ima



Slika 10.9: Shema Nikuradzeove instalacije.

slučajan karakter, odnosno reč je o heterogenoj hrapavosti. Za ove komercijalne cevi proizvođači daju podatke za visinu hrapavosti zida cevi (v. TABELU T.10.1.). Iz navedenih razloga Moody (1944) je, koristeći Nikuradzeove rezultate, a na osnovu formula Poazeja (10.27), Prantla (10.28), Blazijusa (10.29), i Kolbruka (10.30)



Slika 10.10: Nikuradzeov dijagram.

konstruisao dijagram $\lambda - \text{Re}$ prikazan na Sl. 10.11, koji ima veoma široku primenu za određivanje koeficijenta trenja. Detaljnom analizom dijagrama pokazalo se da na njemu, kao i na Nikuradzeovom, ima pet karakterističnih oblasti, i to:

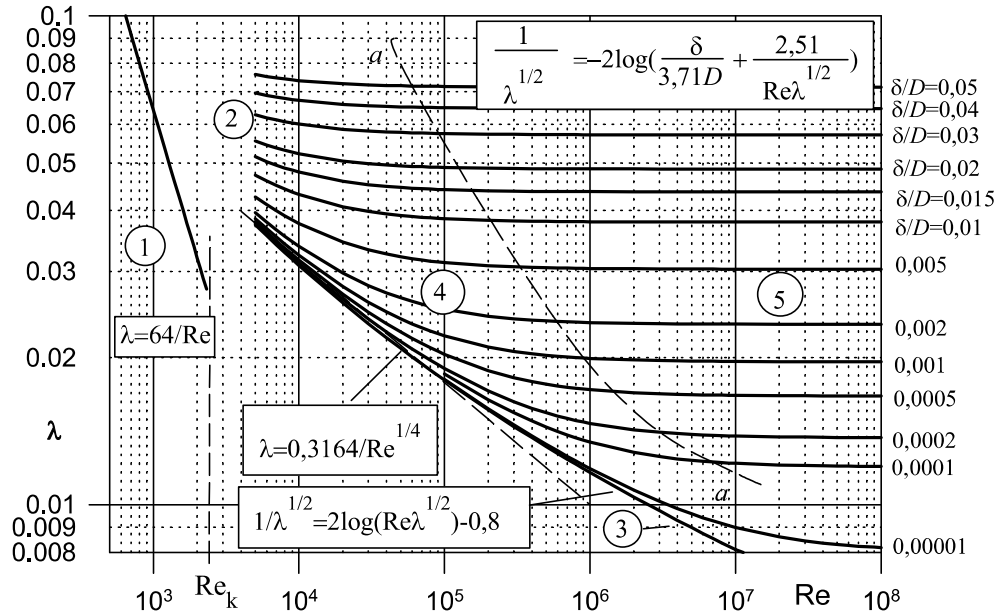
- ① - oblast laminarnog strujanja,
 - ② - prelazna oblast,
 - ③ - oblast hidraulički glatkih cevi $\lambda = \lambda(\text{Re})$,
 - ④ - oblast hidraulički hrapavih cevi $\lambda = \lambda(\text{Re}, \delta / D)$, i
 - ⑤ - oblast hidraulički potpuno hrapavih cevi $\lambda = \lambda(\delta / D)$, koja se još naziva i kvadratna oblast.
- ① *Oblast laminarnog strujanja*

Oblast laminarnog strujanja na logaritamskom dijagramu prikazana je pravom linijom ①. Koeficijent trenja pri laminarnom strujanju kroz cevi kružnog poprečnog preseka može odrediti izrazom Poazeja $\lambda = 64 / \text{Re}$ ($\text{Re} \leq 2320$). Kako je $\lambda = \lambda(\text{Re})$ to

ova oblast pripada hidraulički glatkim cevima.

② *Prelazna oblast*

Prelazna oblast, ili tzv. kritična oblast, u području vrednosti Rejnoldsovih brojeva od $2320 < Re < 4000$, predstavlja oblast prelaska laminarnog u turbulentno strujanje, ili obrnuto. Ova oblast je nestabilna, te su i eksperimentalna merenja u njoj nepouzdana.



Slika 10.11: Mudijev dijagram - zavisnosti koeficijenta trenja od Rejnoldsovog broja i relativne hrapavosti. Oblasti ①-laminarna, ②-prelazna, ③-hidraulički glatke cevi, ④-hidraulički hrapave cevi i ⑤-oblast potpuno hrapavih cevi.

③ *Hidraulički glatke cevi*

U oblasti hidraulički glatkih cevi koeficijent trenja zavisi samo od Rejnoldsovog broja $\lambda = \lambda(Re)$. Ta zavisnost data je Prantlovom formulom (10.28) i Blazijusovom aproksimacijom (10.29). Za $Re > 10^5$ odstupanja Blazijusove od Prantlove formule su značajna te se zato pri većim vrednostima Rejnoldsovog broja Blazijusova formula ne preporučuje za upotrebu.

④ *Hidraulički hrapave cevi*

U oblasti hidraulički hrapavih cevi koeficijent trenja zavisi od Rejnoldsovog broja i od relativne hrapavosti, tj. $\lambda = \lambda(Re, \delta / D)$. Ova oblast se prostire od krive ③ - hidraulički glatkih cevi do krive a-a, koja se naziva Rouzova granica koja predstavlja granicu dvostruke zavisnosti $\lambda = \lambda(Re, \delta / D)$, i koja je definisana izrazom:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\delta}{D} \frac{Re}{200}$$

Koeficijent trenja hidraulički hrapavih cevi određuje se Kolbrukovim izrazom (10.30). Ponekad se u literaturi ova oblast naziva prelazna oblast, pri tome se misli na prelaz od hidraulički glatkih ka hidraulički potpuno hrapavim cevima.

$$\lambda = 129,19 \frac{D^{0,1296}}{C_{HW}^{0,1852} \dot{V}^{0,148}}, \quad h = 10,674 \frac{\dot{V}^{1,852}}{C_{HW}^{1,852} D^{4,870}}.$$

U slučaju strujanja vode ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) koeficijent trenja se svodi na oblik:

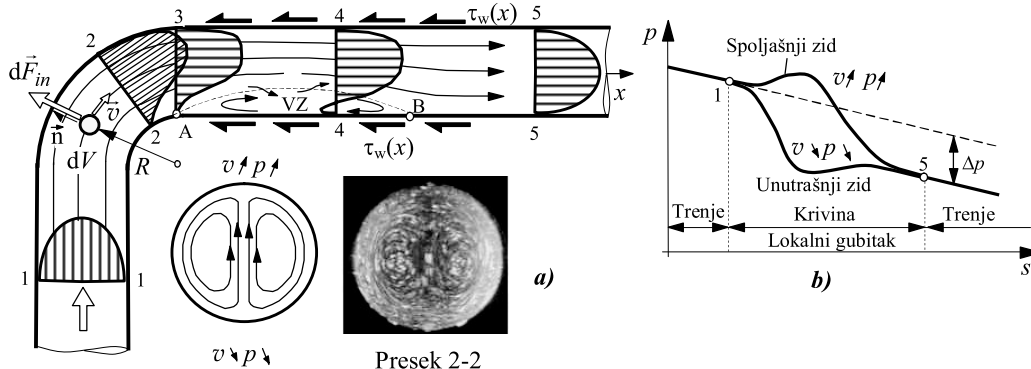
$$\lambda = \frac{1034,52}{C_{HW}^{0,1852} D^{0,0186} \text{Re}^{0,148}}.$$

e) Modifikovana Hazen-Vilijamsova formula ($B = 143,5$, $C = C_R$, $a = 0,6575$, $b = 0,5525$)

$$\lambda = 0,01217 \frac{D^{0,19}}{C_R^{1,81} \dot{V}^{0,19}}, \quad h = \frac{1}{994,13} \frac{\dot{V}^{1,81}}{C_R^{1,81} D^{4,81}} l.$$

10.7. LOKALNI GUBICI STRUJNE ENERGIJE

Razvijeno strujanje u pravolinijskim delovima cevovoda je pravilno i nizstrujno praćeno nepromenljivim profilom brzina, konstantnim tangencijalnim naponom na zidu i konstantnom vrednošću koeficijenta trenja. Međutim, kada takva pravilna fluidna struja naiđe na promenu oblika strujnog prostora ili promenu pravca strujanja ravnomernost brzinskog polja se narušava a strujanje po pravilu postaje veoma kompleksno. Ta mesta u cevovodu sa složenom geometrijom su: krivine, usisi, suženja, proširenja, slavine, ventili, račve i sl., i jednim imenom nazivaju se *lokalni gubici strujne energije*. Za prikaz moguće strukture strujanja može se izabrati bilo koji lokalni gubitak, a radi jednostavnosti geometrije neka to bude krivina sa Sl. 10.14. U ulaznom



Slika 10.14: Struktura strujanja u krivini.

preseku 1-1, pre krivine, je razvijeno strujanje sa poznatim korekcionim koeficijentima α_1 i β_1 . Pri nailasku ovakvog strujnog polja na krivinu doći će do znatnih poremećaja u profilima brzina koji su prikazani u presecima 2-2, 3-3 i 4-4. Osnovni razlog poremećaja profila brzina jeste promena geometrije strujnog prostora i promena pravca strujanja, čime se menja količina kretanja. Naime, pri nailasku na krivinu fluidna struja neće moći da prati geometriju strujnog prostora, pa će zato na nekom mestu (tačka A) nastati tzv. inercijsko odvajanje struje čime se stvara vrtložna zona VZ čija se veličina pretaže do neke nizstrujne tačke B u kojoj se fluidna struja opet “lepi” uz zid cevi. Vrtložna zona je deo strujnog prostora u kome deo fluida rotira po nepravilnim putanjama, a njen oblik i

veoma važan parametar odnosa protoka: $q = \dot{V}_2 / \dot{V}_0$ ($0 \leq q \leq 1$). Eksperimentalni rezultati pokazuju da se javljaju vrtložne zone V1 i V2, pri čemu vrtložna zona V1 postoji samo pri većim vrednostima parametra q , dok vrtložna zona V2 zbog inercijskog odvajanja (u tački C) struje koja skreće postoji pri svim vrednostima parametra q , samo što se sa promenom ovog parametra njena veličina menja. U kontrolnoj zapremini ograničenoj zidovima račve i presecima 0-0, 1-1 i 2-2 strujanje je trodimenzijsko, sa jednim ulazom i dva izlaza. Za ovakvo strujnje nemamo pravo primene Bernulijeve jednačine, međutim, uvođenjem razdelne površine A-ZT formiraju se dve kontrolne zapremine V_{K1} i V_{K2} , pa se sa njima lokalni gubitak račve razdvaja na dva lokalna gubitka geometrija kontrolnih zapremina V_{K1} i V_{K2} . Uvođenjem srednjih vrednosti brzina i pritiska u ovim kontrolnim presecima strujanje je jednodimenzijsko. Za ova jednodimenzijska strujanja, uz pretpostavku da je uticaj promene visine zanemarljiv, važe Bernulijeve jednačine za strujne tokove 0-1 i 0-2, i jednačina kontinuiteta:

$$\begin{aligned} \rho \alpha_{01} \frac{v_{01}^2}{2} + p_0 &= \rho \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho \zeta_{01} \frac{v_1^2}{2} \\ \rho \alpha_{02} \frac{v_{02}^2}{2} + p_0 &= \rho \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho \zeta_{02} \frac{v_2^2}{2} \\ \dot{V}_0 &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \rightarrow v_0 A_0 = v_1 A_1 + v_2 A_2 \end{aligned}$$

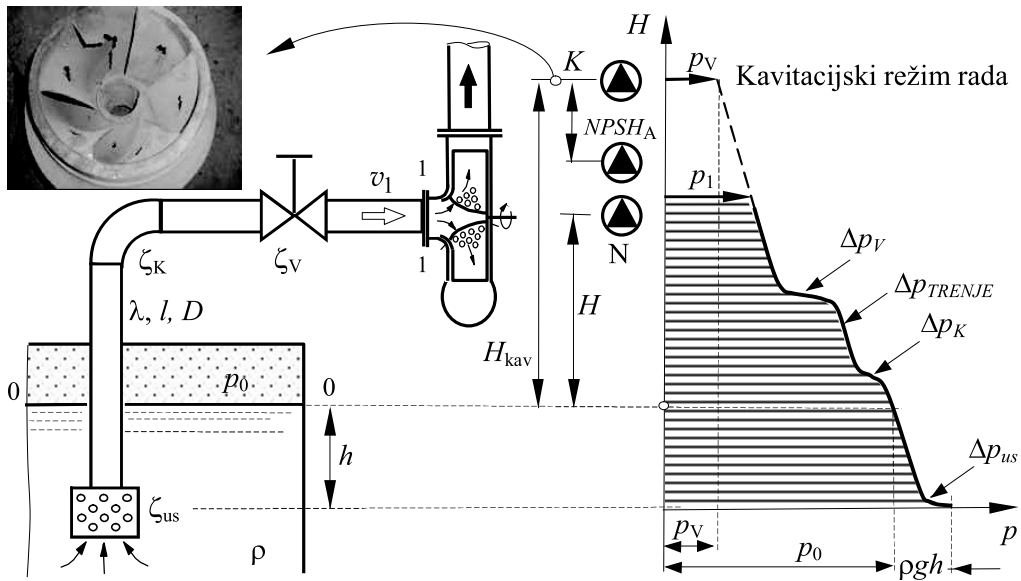
U Bernulijevim jednačinama brzine v_{01} i v_{02} su srednje brzine strujanja delova preseka 0-0 kojima pripadaju zapreminski protoci prostrujavanja: $\dot{V}_1 = v_{01} A_{01} = v_1 A_1$ i skretanja fluidne struje: $\dot{V}_2 = v_{02} A_{02} = v_2 A_2$, dok su α_i ($i=0, 01, 02, 1, 2$) korekcionni koeficijenti kinetičke energije, a ζ_{01} i ζ_{02} su koeficijenti lokalnih gubitaka strujne energije pri prostrujavanju i skretanju struje, redosledno. Deljenjem površine ulaznog poprečnog preseka na dve: $A_0 = A_{01} + A_{02}$, a samim tim i kinetičke energije preseka:

$$E_{k0} = \int_{A_0} \frac{v^2}{2} dm = \frac{\rho}{2} \int_{A_0} v^3 dA \equiv \frac{\rho}{2} \int_{A_{01}} v^3 dA + \frac{\rho}{2} \int_{A_{02}} v^3 dA$$

posredstvom definicije (10.6) dobija se veza između korekcionnih koeficijenata ulaznog poprečnog preseka:

$$\alpha_0 = \alpha_{01} \left(\frac{A_0}{A_{01}} \right)^2 (1-q) + \alpha_{02} \left(\frac{A_0}{A_{02}} \right)^2 q .$$

Da bi odredili Koriolisove korekzione koeficijente neophodno je raspolagati sa profilima brzina, a do njih se dolazi eksperimentalno. Na osnovu detaljnog eksperimentalnog merenja profila brzina, pri turbulentnom strujanju u ravanskoj T-račvi visine h , određuju se vrednosti korekcionnih koeficijenata brzine koje su prikazane na Sl. 10.29, za odnose protoka $q = 0,41$ i $q = 0,64$, ref. [10.7]. U ulaznom preseku T-račve je razvijeni turbulentni profil brzina, koji prema Poglavlju 10.2, ima vrednosti korekcionnih koeficijenata $\beta_0 = 1,02$ i $\alpha_0 = 1,058$. Sa Sl. 10.29 se vidi da nizstrujni profili brzina značajno odstupaju od razvijenog, a najveća odstupanja su u oblastima vrtložnih zona V1 i V2, i tek posle nizstrujnih rastojanja $x/h > 8 \div 10$ profili brzina se smiruju i poprimaju karakter razvijenog profila sa $\alpha_1 = 1,058$ i $\alpha_2 = 1,058$. Ovi



Slika 11.11: Kavitacija u pumpama.

gde je za prikazani cevovod: $\Delta p_g = \rho(\zeta_{us} + \zeta_k + \zeta_V + \lambda l / D)v^2 / 2$ ukupan pad pritiska u usisnom vodu. Iz ove Bernulijeve jednačine određuje se usisna visina pumpe:

$$H(p_1) = \frac{p_0 - p_1}{\rho g} - \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} - \frac{\Delta p_g}{\rho g} . \quad (11.10)$$

Na Sl. 11.11 prikazana je linija nizstrujne promene pritiska, ili ako se napiše kao $p / \rho g$ ona predstavlja tzv. piezometarsku liniju cevovoda. Za položaj pumpe N pritisak na ulazu u pumpu je p_1 i nema kavitacije, međutim, povećanjem usisne visine H pritisak p_1 opada i pri jednoj visini $H = H_{kav}$, u tački K, pritisak dostiže vrednost pritiska isparavanja tečnosti $p_1 = p_V$ čime pumpa radi u kavitacijskom režimu. Prema tome, visina usisa pumpe pri kojoj postoji kavitacija je:

$$H_{kav} = H(p_V) = \frac{p_0 - p_V}{\rho g} - \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} - \frac{\Delta p_g}{\rho g} .$$

Da bi se sigurno ostvario bezkavitacijski režim rada proizvođači pumpi definišu visinu:

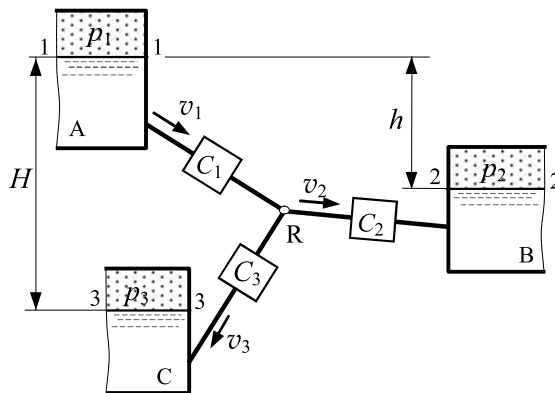
$$NPSH_A = \frac{p_{tot,1} - p_V}{\rho g} = \frac{p_0 - p_V}{\rho g} - H - \frac{\Delta p_g}{\rho g} , \quad (11.11)$$

koja se naziva *neto pozitivna visina usisavanja* pumpe, a indeks A označava da je reč o dopuštenoj visini, gde je $p_{tot,1} = p_1 + \alpha_1 \rho v_1^2 / 2$ totalni pritisak u ulaznom preseku. U stručnoj literaturi oznaka $NPSH_A$ je skraćenica od engleskog termina - Net Positive Suction Head Available, i odnosi se na usisni cevovod, dok se za samu pumpu definiše raspoloživa visina $NPSH_R$ određena eksperimentalno. Za siguran rad pumpe bez kavitacije treba da je ispunjen uslov: $NPSH_A > NPSH_R$, s tim da postoji preporuka da je: $NPSH_A > NPSH_R + 0,5$ [m].

Ako pumpa radi duži vremenski period u kavitacijskom režimu, sigurno će doći do razaranja materijala od koga je napravljeno kolo i do oštećenja pumpe. Zato kavitacijski režim rada treba izbegavati i protiv kavitacije se treba boriti. Glavni teren borbe protiv kavitacije pumpi je: pravilan izbor visine usisavanja, smanjenje usisnih gubitaka, izbegavanje ugradnje regulacionih ventila u usisnom cevovodu, smanjenje brzine strujanja fluida, i smanjenje temperature fluida na minimalno potrebnu.

11.3. HIDRAULIČKI PRORAČUN SLOŽENIH CEVOVODA

Pod složenim cevovodima podrazumevaju se oni cevovodi kod kojih ima bar jedno čvorno mesto gde se cevovod grana - deli ili spaja. Već je, u uvodu ovog Poglavlja, rečeno da postoje dva tipa složenih cevovoda – razgranati i prstenasti (Sl. 11.1). Neka u složenom cevovodu ima n cevnih deonica, pa tada za hidraulički proračun treba koristiti



Slika 11.12: Složeni cevovod.

sistem od n algebarskih jednačina. Ovaj sistem jednačina sadrži Bernulijeve jednačine za karakteristične strujne tokove između nivoa tečnosti u rezervoarima i za zatvorena hidraulička strujana kola, i jednačine kontinuiteta za čvorove.

Za prikaz proračuna razgranatog složenog cevovoda uzmimo elementarni primer – slučaj tri rezervoara, Sl. 11.12. Posmatrajmo tri rezervoara: A, B i C, iznad čijih nivoa tečnosti vladaju konstantni pritisci p_i , i koji su povezani cevnicama u

kojima su ekvivalentni koeficijenti gubitka C_i ($i=1,2,3$). Koji će smerovi strujanja biti u cevnicama zavisi od visina h i H i pritisaka p_i . Pretpostavimo da su uslovi takvi da se strujanje odvija od rezervoara A ka rezervoarima B i C, i neka su u cevnicama srednje brzine strujanja v_i . Kako u složenom cevovodu ima $n=3$ cevnih deonica, to je za hidraulički proračun neophodno koristiti 3 jednačine, i to dve Bernulijeve jednačine za strujne tokove između nivoa 1-1 i 2-2, i 1-1 i 3-3, i jednačinu kontinuiteta za čvor - račun R:

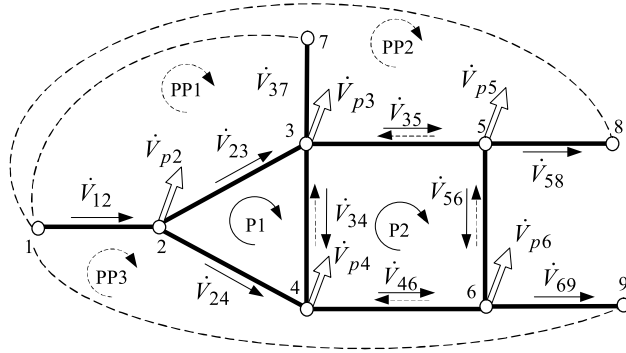
$$\frac{p_1}{\rho} + gh = \frac{p_2}{\rho} + C_1 \frac{v_1^2}{2} + C_2 \frac{v_2^2}{2} ; \quad \frac{p_1}{\rho} + gH = \frac{p_3}{\rho} + C_1 \frac{v_1^2}{2} + C_3 \frac{v_3^2}{2} ;$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 , \quad (11.12)$$

gde su protoci: $\dot{V}_i = v_i D_i^2 \pi / 4$. Iz sistema jednačina (11.12) određuju se tri nepoznate, i to: tri brzine strujanja v_i , odnosno protoci \dot{V}_i , ako je geometrija cevovoda definisana; ili pri zadatim protocima određuju se prečnici cevi D_i .

Ako je u odnosu na prethodno analizirani elementarni slučaj sa Sl.11.12 razgranati cevovod složeniji, tada se za hidraulički proračun cevovoda formira sistem jednačina

Sl. 11.1c, koji je sa više detalja dat na Sl. 11.15. U cevovodu ima ukupno 9 čvorova, od kojih je ulazni čvor $i=1$, izlazni čvorovi su $i=7,8,9$, dok su unutrašnji čvorovi mreže $i=2,3,4,5,6$, njih ukupno $N_c = 5$, u kojima su protoci potrošnje \dot{V}_{pi} . U čvorovima



Slika 11.15: Elementarni primer prstenaste cevovodne mreže.

definišimo generalisane pritiske: $P_i = p_i + \rho g z_i + \rho v_i^2 / 2$, ($i=1, \dots, 9$). Između čvorova nalazi se ukupno $N = 8$ cevnih deonica smeštenih između susednih čvorova ij , a koeficijenti hidrauličke karakteristike u njima su K_{ij} , sa padovima pritiska

$$\Delta p_{ij} = K_{ij} \dot{V}_{ij}^n \quad (ij=12, 23, 24, 34, 37, 35, 46, 56, 69, 58),$$

gde prvi indeks - i označava čvor od koga se pretpostavlja da se vrši strujanje a drugi indeks j označava čvor ka kome se vrši strujanje. Da li će strujanje biti od čvora i ka čvoru j protokom \dot{V}_{ij} , ili obrnuto protokom \dot{V}_{ji} zavisi od trenutne raspodele pritiska u mreži. Ovo nameće potrebu da se u cevni deonicama mreže uvede jednakost protoka $\dot{V}_{ij} = -\dot{V}_{ji}$, i padova pritiska $\Delta p_{ij} = -\Delta p_{ji}$, a stvarne smerove strujanja dobijamo kao jedan od rezultata proračuna. Za hidraulički proračun prstenaste mreže koristimo Bernulijeve jednačine za ulazno - izlazne čvorove:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_7 + \Delta p_{12} + \Delta p_{23} + \Delta p_{37} ; & P_1 &= P_8 + \Delta p_{12} + \Delta p_{23} + \Delta p_{35} + \Delta p_{58} \\ P_1 &= P_9 + \Delta p_{12} + \Delta p_{24} + \Delta p_{46} + \Delta p_{69} \end{aligned} \quad (11.19)$$

Bernulijeve jednačine za zatvorene strujne krugove - prstenove P1 i P2, kojih ukupno ima $N_p = 2$, i koje sledeći jedan usvojeni smer strujanja obilaska prstenova glase:

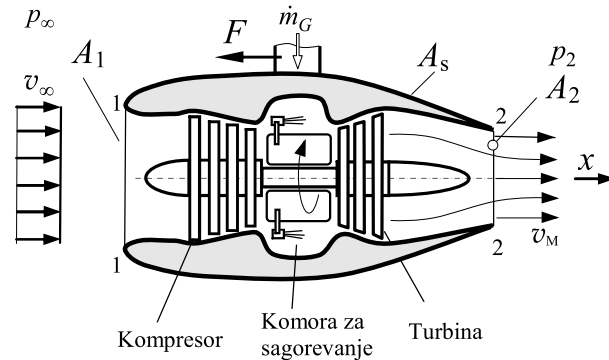
$$\Delta p_{23} + \Delta p_{34} + \Delta p_{42} = 0 \quad ; \quad \Delta p_{35} + \Delta p_{56} + \Delta p_{64} + \Delta p_{43} = 0 \quad (11.20)$$

i jednačine kontinuiteta za unutrašnje čvorove mreže:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{p2} &= \dot{V}_{12} + \dot{V}_{32} + \dot{V}_{42} ; & \dot{V}_{p3} &= \dot{V}_{23} + \dot{V}_{73} + \dot{V}_{53} + \dot{V}_{43} ; & \dot{V}_{p4} &= \dot{V}_{24} + \dot{V}_{34} + \dot{V}_{64} ; \\ \dot{V}_{p5} &= \dot{V}_{35} + \dot{V}_{85} + \dot{V}_{65} ; & \dot{V}_{p6} &= \dot{V}_{46} + \dot{V}_{56} + \dot{V}_{96} \end{aligned} \quad (11.21)$$

Jednačine (11.19) i (11.20) su istog tipa pa se uvođenjem tzv. *pseudo prstenova* PP1, PP2 i PP3, kojih ukupno ima $N_{pp} = 3$, sa lažnim cevima 17; 18 i 19 u kojima su padovi pritiska jednaki razlici generalisanih pritiska: $\Delta p_{17} = P_1 - P_7$, $\Delta p_{18} = P_1 - P_8$ i $\Delta p_{19} = P_1 - P_9$, Bernulijeve jednačine (11.19) lako se transformišu na Bernulijeve jednačine za prstenove: pa npr. za prvu od jednačina (11.19) važi:

reakcije prenosi sa motora na konstrukciju i čini deo pogonske sile aviona, a ukupna pogonska sila dobija se kao zbir pogonskih sila svih mlaznih motora koji se nalaze na avionu. U ulaznom preseku mlaznog motora protok vazduha je $\dot{m}_1 = \rho_\infty v_\infty A_1$, a u izlaznom preseku protok gasova je $\dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_G$. Uočimo kontrolnu zapreminu između preseka 1-1



Slika 12.3: Mlazni motor

i 2-2 u kojoj se odvija promena količine kretanja, i smatrajući da su ulazna i izlazna struja gasa uniformne ($\beta_1 = \beta_2 = 1$), primenom zakona o promeni količine kretanja (12.1) za pravac kretanja x dobijamo silu:

$$R = p_\infty A_1 + \dot{m}_1 v_\infty - p_2 A_2 - \dot{m}_2 v_M + P_s,$$

u kojoj je sila pritiska okolnog vazduha koja deluje na spoljašnju površinu A_s motora:

$$P_s = \int_{A_s} (p_\infty dA)_x = -p_\infty (A_1 - A_2).$$

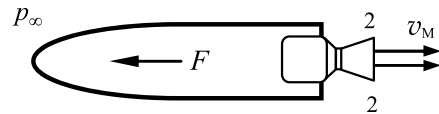
Kako je osnovni interes odrediti silu potiska mlaznog motora F , a ne silu reakcije R , to primenom trećeg Njutnovog zakona: $F = -R$, sledi da je:

$$F = (\dot{m}_1 + \dot{m}_G) v_M - \dot{m}_1 v_\infty + (p_2 - p_\infty) A_2 \quad (12.9)$$

što predstavlja opšti izraz za silu potiska turboreaktivnog mlaznog motora. Za dozvučna strujanja izlazni pritisak je $p_2 = p_\infty$, a razlikuje se od p_∞ kod nadzvučnih strujanja gasa. Ako se na izlazu iz mlaznog motora posmatraju dozvučna strujanja, i uzme u obzir da je maseni protok goriva mnogo manji od masenog protoka vazduha ($\dot{m}_1 \gg \dot{m}_G$), tada se prema (12.9) sila potiska mlaznog motora određuje približnim izrazom: $F_M = \dot{m}_1 (v_M - v_\infty)$, odakle sledi opšti zaključak: da bi sila potiska turboreaktivnog mlaznog motora bila veća mora da je razlika brzina ističućeg mlaza i neporemećene struje što veća.

Izraz (12.9) za silu potiska mlaznog motora može se iskoristiti i za pogon raketa, s tim da se takav mlazni motor naziva raketni motor. Kod raketnog motora sa Sl. 12.4 nema ulaznog protoka \dot{m}_1 , već samo masenog protoka produkata sagorevanja \dot{m}_2 koji na izlazu konvergentno-divergentnog mlaznika ističu brzinom v_M , tako da se prema (12.9) sila potiska raketnog motora dobija kao:

$$F = \dot{m}_2 v_M + (p_2 - p_\infty) A_2.$$



Slika 12.4: Raketni motor

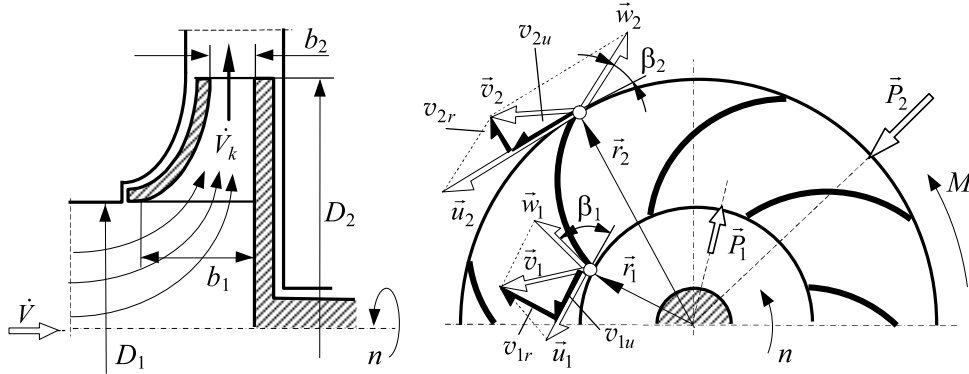
12.4. OJLEROVA JEDNAČINA ZA TURBOMAŠINE

Posmatrajmo radno kolo centrifugalne turbomašine – pumpe ili ventilatora sa Sl. 12.5, koje je definisano geometrijskim veličinama: prečnikom, širinom i uglom lopatica, na ulazu $D_1 = 2r_1$, b_1 i β_1 i na izlazu iz kola $D_2 = 2r_2$, b_2 i β_2 , redosledno. Kolo centrifugalne turbomašine rotira se konstantnom brzinom obrtanja n [min^{-1}], odnosno

ugaonom brzinom $\omega = n\pi/30$. Na ulaznom i izlaznom prečniku kola definišu se obimske-prenosne komponente brzine: $\vec{u}_1 = \vec{\omega} r_1$ i $\vec{u}_2 = \vec{\omega} r_2$, i relativne-tangencijalne na lopaticu brzine strujanja fluida \vec{w}_1 i \vec{w}_2 . Na osnovu ovih komponentata određuju se apsolutne brzine na ulazu i izlazu kola kao:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 \equiv \vec{v}_{1r} + \vec{v}_{1u} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2 \equiv \vec{v}_{2r} + \vec{v}_{2u} \quad ,$$

a svrsishodno je ove brzine razložiti na komponente u obimskom: \vec{v}_{1u} i \vec{v}_{2u} , i radijalnom pravcu: \vec{v}_{1r} i \vec{v}_{2r} . Radijalne komponente apsolutne brzine određuju se iz



Slika 12.5: Kolo centrifugalne turbomašine.

jednačine kontinuiteta: $\dot{V}_k = v_{ir} D_i \pi b_i$ i iznose: $v_{ir} = \dot{V}_k / D_i \pi b_i$, a važe i veze između komponentata brzina: $v_{ir} = w_{ir}$ i $w_{ir} / w_{iu} = \operatorname{tg} \beta_i$, a projekcije apsolutne brzine na obimski pravac su:

$$v_{iu} = u_i - w_{iu} = u_i - \frac{\dot{V}_k}{D_i \pi b_i \operatorname{tg} \beta_i} \quad , \quad (i=1,2).$$

Usled proticanja fluida kroz kolo turbomašine zapreminskim protokom \dot{V}_k polja pritiska i brzine se menjaju zbog čega dolazi do promene količine kretanja, a sila reakcije kola koja deluje na lopaticu, prema (12.1) je:

$$\vec{R} = \rho \dot{V}_k (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \quad .$$

Moment sile reakcije, u odnosu na osu rotacije, prema (12.2) definisan je kao:

$$\vec{M} = \vec{r}_2 \times (\rho \dot{V}_k \vec{v}_2 + \vec{P}_2) - \vec{r}_1 \times (\rho \dot{V}_k \vec{v}_1 + \vec{P}_1) = \rho \dot{V}_k (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 - \vec{r}_1 \times \vec{v}_1) \quad ,$$

pri čemu su momenti sile pritiska $\vec{r}_i \times \vec{P}_i = 0$, jer su vektori \vec{P}_i i \vec{r}_i kolinearni ($i=1,2$). U skalarnom obliku moment promene količine kretanja na vratilu turbomašine je:

$$M = \rho \dot{V}_k (v_{2u} r_2 - v_{1u} r_1) \quad . \quad (12.10)$$

i on daje snagu kola $P_k = M \omega$. U turbomašinama – pumpama, ventilatorima i turbokompresorima radnom kolu preko vratila dovodi se snaga $P_k = M \omega$, koja se u kolu transformiše u hidrauličku snagu $P_k = \rho \dot{V}_k Y_k$, pa iz jednakosti ovih snaga sledi izraz :

$$Y_k = v_{2u} u_2 - v_{1u} u_1 = \omega (r_2 v_{2u} - r_1 v_{1u}) \quad (12.11)$$

koji definiše teorijski napor kola turbomašine i naziva se Ojlerova jednačina za turbomašine i predstavlja osnovnu jednačinu za proučavanje turbomašina. Ojlerova

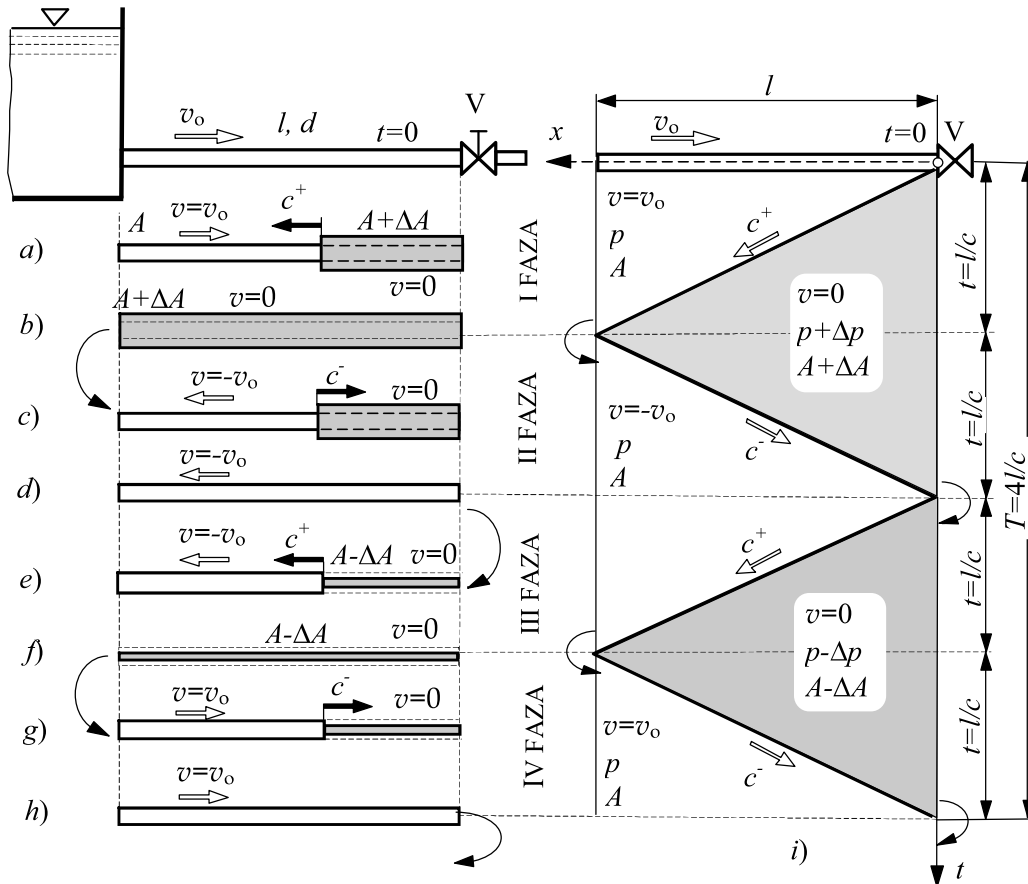
13. HIDRAULIČKI UDAR

Hidrosistemi obično rade u stacionarnim režimima, tj. kada su sve strujne veličine nezavisne od vremena. Međutim, u toku rada hidrauličkog sistema veoma je česta potreba za promenom protoka fluida ili pritiska, tj. režima rada, što se postiže otvaranjem ili zatvaranjem ventila, ili promenom režima rada pumpe. Tom prilikom stacionarnost strujanja se narušava sve dok se ne postigne novi stacionarni režim. Strujanje između dva stacionarna režima je nestacionarno i naziva se *prelazni proces*. Ako se u hidrauličkim sistemima promene brzine i pritiska odigravaju brzim otvaranjem ili zatvaranjem ventila, naglim zaustavljanjem ili startovanjem pumpe, ili naglim ispadom turbine, takav prelazni proces se naziva *hidraulički udar* ili skraćeno *hidroudard*. Hidroudard je neželjena pojava u hidrauličkim sistemima jer za posledicu može da ima: pojavu buke, vibracije, teškoće pri organizaciji vođenja procesa transporta ili distribucije fluida, oštećenja cevi ili cevnih elemenata (ventila, pumpi ili turbine), i havariju cevovoda. Samu neželjenost i naglost pojave dobro opisuju korišćeni termini: francuski "marteau de l'eau" i engleski "wather hammer" koji znače *vodeni čekić*. Najnepovoljniji efekti u hidrauličkim sistemima javljaju se pri naglim zatvaranjima ventila, te je zato proučavanje ovako nastalog hidroudarda od posebnog značaja. Radi uvođenja u probleme nastale hidroudardom posmatrač se idealizovano-neviskozno strujanje kroz pravu cev površine poprečnog preseka A u koju je ugrađen regulacioni ventil V sa Sl. 13.1. Neka je na početku ventil otvoren a kroz cev se odvija stacionarno strujanje poznatom brzinom v_0 . Ako se u jednom trenutku ($t=0$) ventil naglo zatvori u cevi će nastati hidroudard koji ima četiri faze, i to:

Prva faza - Zatvaranjem ventila fluid koji se nalazi u njegovoj blizini naglo će se zaustaviti, a kinetička energija tečnosti se transformiše u pritisnu, što se manifestuje porastom pritiska. Ovu promenu fluid će osetiti kao jedan "šok", a informacija o ovoj promeni uzvodno kroz cev prenosi se brzinom c koju nazivamo *brzina propagacije poremećajnog talasa pritiska*, dok će fluid u drugom delu cevi po inerciji i dalje nastaviti da se kreće brzinom v_0 . To znači da u cevi razlikujemo poremećenu oblast gde se fluid ne kreće i neporemećenu oblast gde fluid struji, a granica između njih je front poremećajnog talasa (Sl. 13.1a). Ovom prilikom u poremećenoj oblasti, gde je $v=0$, doći će do porasta pritiska sa p na $p+dp$ a na račun smanjenja kinetičke energije fluida, što dalje zbog elastičnosti cevi dovodi do povećanja poprečnog preseka sa A na $A+dA$. Usled naglosti promene pritiska porast pritiska dp je *konačni porast pritiska* Δp , a brzina c kojom se ovaj poremećaj širi je *brzina propagacije konačnih poremećaja pritiska*. Priraštaj pritiska Δp može biti mnogo veći od početnog pritiska p .

Kada poremećeni talas dođe do kraja cevi (Sl. 13.1*b*) celokupna cev je pod povećanim pritiskom $p + \Delta p$ i površinom $A + \Delta A$, i brzinom $v = 0$. U odnosu na početno stacionarno stanje, a zbog povećanja površine poprečnog preseka, u cevi će se nalaziti veća masa vode. Prva faza porasta pritiska i površine poprečnog preseka je najnepovoljniji period promene pritiska, jer u njoj može doći do oštećenja spojeva ili pucanja cevi – havarije cevovoda. Nailaskom poremećanog talasa na novu čvrstu granicu ili rezervoar vrši se njegova refleksija-promena smeru širenja.

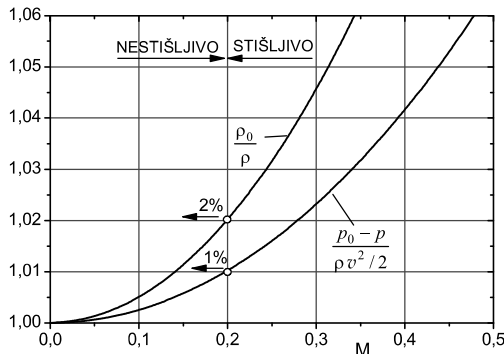
Druga faza – Dolaskom poremećajnog talasa na početak cevi vrši se refleksija i poremećajni talas pritiska se vraća ka ventilu (Sl. 13.1*c*). I ovde se poremećajni talas kreće brzinom c , međutim, da bi se razlikovali smerovi talasa pritiska od ventila i reflektovani talas uobičajeno je da se koriste oznake c^+ za smer od ventila, odnosno od izvora poremećaja, i c^- za reflektovani talas. U fazi refleksije talasa smanjuje se površina poprečnog preseka, i vraća se na prethodnu vrednost A , a iz poremećenog dela, gde postoji višak mase vode, voda struji brzinom $v = -v_0$ ka neporemećenom delu, s tim što je sada smer strujanja suprotan u odnosu na prvobitni. Dolaskom reflektovanog talasa pritiska brzinom c^- do ventila V (Sl. 13.1*d*) celokupna cev je sa brzinom strujanja $v = -v_0$ i površinom A .



Slika 13.1: Faze hidroudara u cevi.

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \approx 1 + \frac{1}{2} M^2 + \frac{2 - \kappa}{8} M^4 + \frac{(2 - \kappa)(3 - 2\kappa)}{48} M^6 + \dots \quad (14.33)$$

Grafički prikaz aproksimativnih funkcija (14.32) i (14.33) dat je na Sl. 14.9. Vrednosti funkcija:



Slika 14.9: Uticaj Mahovog broja na stišljivost gasa

$$(p_0 - p)/(\rho v^2/2) = 1 \quad \text{i} \quad \rho_0/\rho = 1$$

odgovaraju slučaju strujanja po modelu nestišljivog fluida, i u odnosu na njih vrednost Mahovog broja značajno utiče na vrednosti pritiska i gustine na način da porastom Mahovog broja rastu i odstupanja u određivanju pritiska i gustine. Ako se, prema dogovoru, zadovoljimo greškom u određivanju pritiska do 1%, odnosno greškom u određivanju gustine do 2%, a što je za vrednosti Mahovog broja $M \leq 0,2$

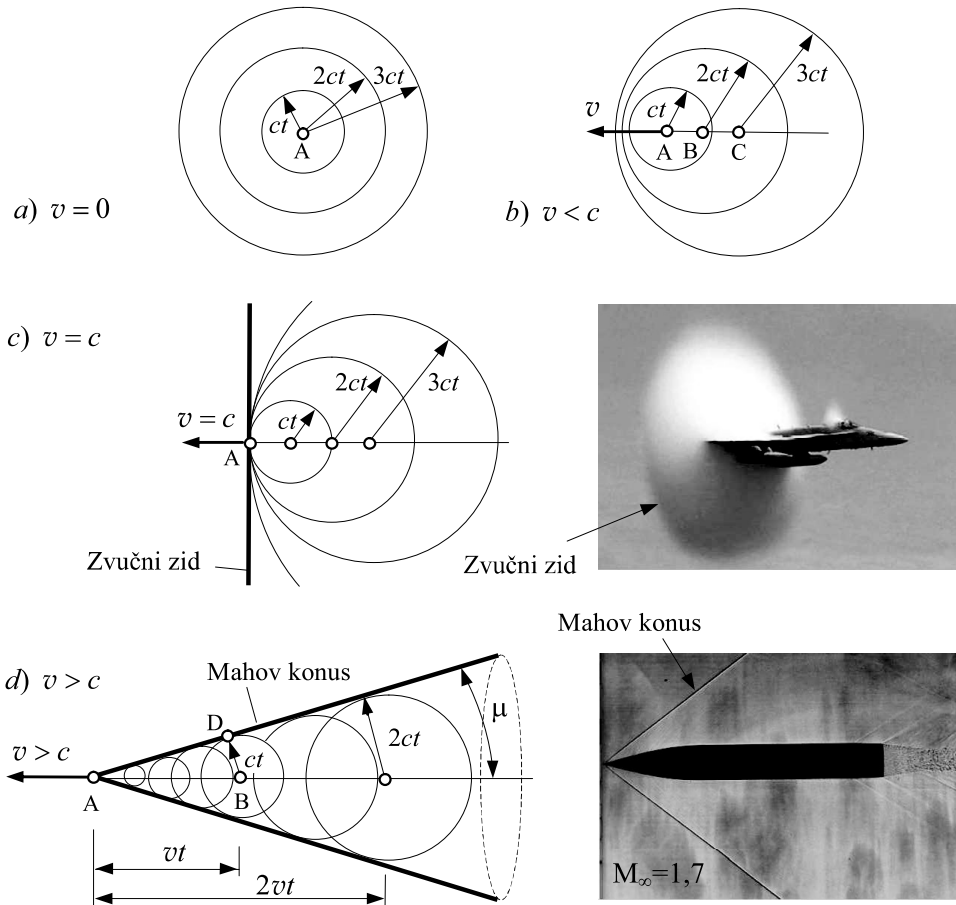
strujanje gasa možemo smatrati nestišljivim. Preko ove vrednosti Mahovog broja greške u određivanju pritiska i gustine po modelima nestišljivog i stišljivog strujanja postaju velike i neprihvatljive. Iz navedenih razloga opšte je prihvaćeno da se strujanje gasa do vrednosti Mahovog broja $M < 0,2$ smatra nestišljivim, a za vrednosti $M > 0,2$ strujanje gasa je stišljivo. Ako se pri normalnim uslovima, gde je brzina zvuka $c_0 = 340,5 \text{ m/s}$, sa Mahovog broja pređe na brzinu strujanja dobija se da se pri brzinama gasa do $v = c M < 68 \text{ m/s}$ strujanje može smatrati nestišljivim. Ovaj kriterijum ispunjen je u brojnim primenama kao na primer što su strujanja vazduha u ventilacionim i klimatizacionim sistemima. S druge strane, strujanje gasa u turbinskim postrojenjima, u raketnoj i vazduhoplavnoj tehnici obavezno treba računati po modelu stišljivog fluida.

14.4. POKRETNI POREMEĆAJI U FLUIDU

Svako telo koje se kreće kroz fluid, odnosno svaka tačka na telu, izaziva poremećaje pritiska, i ako smatramo da je taj poremećaj mali on se kroz fluid prenosi brzinom zvuka: $c = \sqrt{dp/d\rho}$. Radi jednostavnosti dalje analize neka telo predstavlja pokretni tačkasti poremećaj. U zavisnosti od međusobnog odnosa brzine kretanja tačkastog poremećaja v i brzine zvuka c pokretni poremećaj može da izazova različite efekte u strujnom polju.

a) Ako u tački A sa Sl. 14.10a telo miruje ($v = 0$), i u njoj se izazove poremećaj pritiska tada se u prostoru poremećaj ravnomerno-radijalno širi brzinom c , i posle isteka vremena t front poremećajnog talasa nalaziće se na sferi poluprečnika ct . U narednim vremenskim trenucima $2t$, $3t$ itd. front poremećajnog talasa je na sfernim površinama poluprečnika $2ct$, $3ct$ i td. Front poremećajnog talasa deli prostor na poremećeni i neporemećeni deo - „zonu tišine“. U svakodnevnom životu okruženi smo brojnim primerima nepokretnih tačkastih poremećaja zvuka kao npr.: čovekov govor, slušanje

muzike, udarac čekića itd.; ili dobrom primeru vizualizacije ravnanskih poremećajnih talasa kada kamenčić pustimo da vertikalno padne na mirnu površinu vode a kao poremećaj se pojavljuju koncentrični kružni talasi.

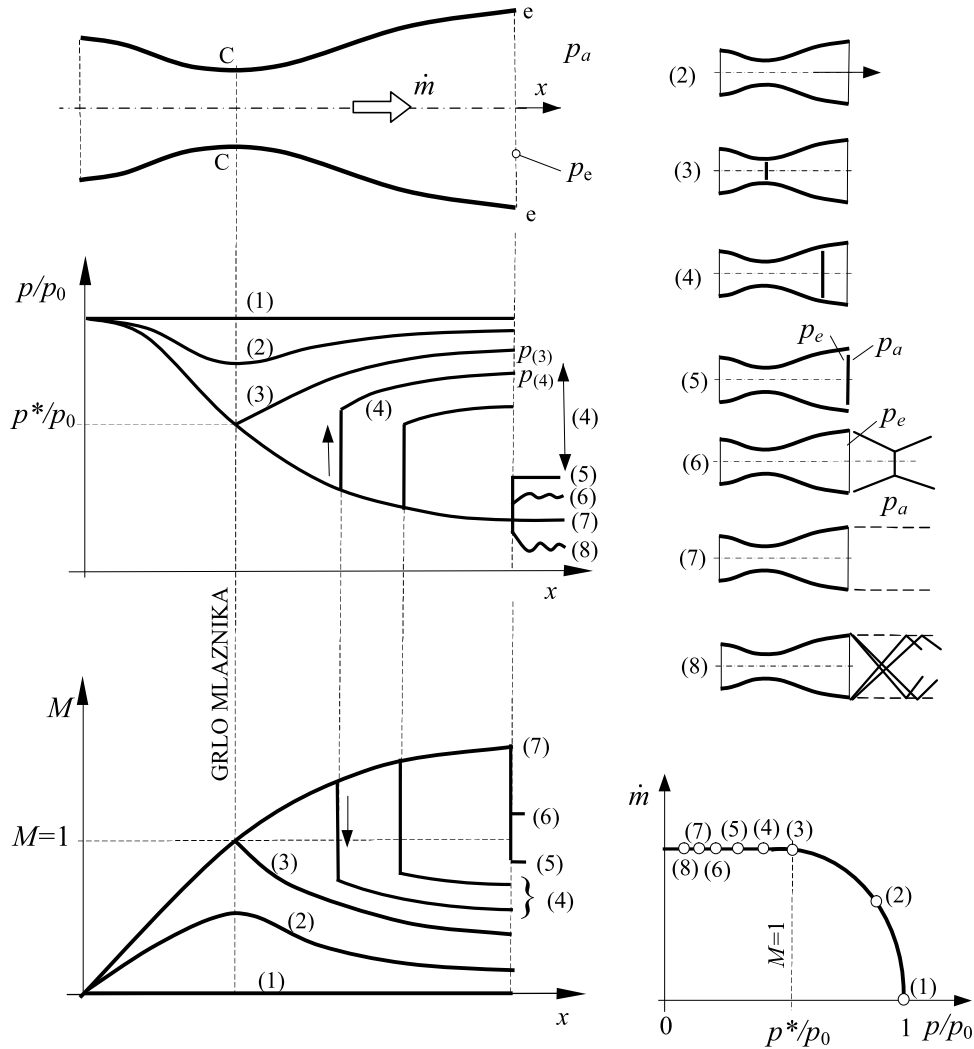


Slika 14.10: Kretanje poremećaja kroz fluid.

b) Kada se tačkasti poremećaj kreće brzinom manjom od brzine zvuka: $v < c$, odnosno sa $M_\infty < 1$, Sl. 14.10b, posmatrajmo tri njegova uzastopna položaja u tačkama C, B i A koje se nalaze na ekvidistantnim rastojanjima $\overline{AB} = \overline{BC} = ct$, i iz njih se propagira poremećajni talas čiji se front nalazi na rastojanjima: $3ct, 2ct$ i ct , redosledno. S obzirom na to da se poremećaj izazvan telom kreće brže od tela to će fluid ispred tela imati „informaciju“ da telo nailazi i strujnice će se blagovremeno prilagoditi telu.

c) Specijalni slučaj kretanja tela jeste kada se telo kreće brzinom zvuka: $v = c$, odnosno Mahov broj je $M_\infty = 1$, Sl. 14.10c. U ovom slučaju poremećaj je nošen telom istom brzinom, i fluid ispred tela nema „informaciju“ o nailasku poremećaja, već će se svi poremećaji koji su emitovani u trenucima: $t, 2t, 3t$ itd., nalaziti na sferama poluprečnika: $ct, 2ct$ i $3ct$, itd., i svi oni prolaze kroz tačku A u kojoj se nalazi telo i oni formiraju jednu ravan kao granicu između poremećene oblasti iza tela i

promenom pritiska na izlazu $p_e = p_{(2)}$ koji je jednak pritisku okoline $p_e = p_a$, kontroliše se celokupno strujno polje u mlazniku, a protok može da se menja u duhu objašnjenja vezanog za Sl. 14.21.



Slika 14.24: Režimi strujanja u konvergentno-divergentnom mlazniku.

(3) - Režim (3) odnosi se na ostvarenje kritičnog strujanja u grlu mlaznika, sa $M = 1$ i sa pritiskom p^*/p_0 , i izlaznim pritiskom $p_{(3)}$ jednakim pritisku okoline $p_{(3)} = p_a$. U ovom režimu i u konvergentnom i u divergentnom delu mlaznika strujanje je dozvučno izentropsko. Dalje smanjenje pritiska u izlaznom preseku $p < p_{(3)}$ ne dovodi do promene masenog protoka jer je mlaznik zagušen (v. Poglavlje 14.6.2), i sve veličine u konvergentnom delu mlaznika ostaju nepromenjene.

(4) - Kada je na izlazu mlaznika pritisak $p_{(4)}$ manji od $p_{(3)}$ - režim (4), pritisak u divergentnom delu iza grla opada i manji je od kritičnog a strujanje je nadzvučno,

izraza (14.68) dobija kvadratna jednačina:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)^2 - (1 + \kappa) \frac{p}{p^*} + \kappa \frac{h}{h^*} = 0 ,$$

čije je rešenje:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 + \kappa \pm \sqrt{(1 + \kappa)^2 - 4\kappa \frac{h}{h^*}} \right] .$$

Zamenom ovog rešenja u (14.69) dobija se promena entropije u funkciji entalpije:

$$s - s^* = c_p \frac{h}{h^*} - R \ln \frac{1}{2} \left[1 + \kappa \pm \sqrt{(1 + \kappa)^2 - 4\kappa \frac{h}{h^*}} \right] , \quad (14.70)$$

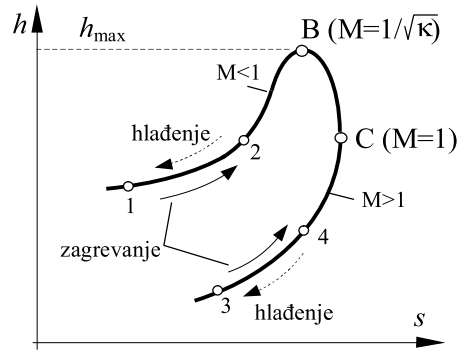
koja se naziva Rejljeva kriva, a njen grafički prikaz dat na Sl. 14.27. Karakteristične tačke na krivoj su B i C. Kako je entalpija prema izrazima (14.62) i (14.63) jednaka:

$$h = c_p T = \text{const.} \frac{M}{1 + \kappa M^2} ,$$

to posle traženja ekstrema $dh/dM = 0$ sledi da je tačka B definisana sa $M = 1/\sqrt{\kappa}$, a samim tim i sa maksimalnom vrednošću:

$$\left(\frac{T}{T^*}\right)_{\max} = \left(\frac{h}{h^*}\right)_{\max} = \frac{(1 + \kappa)^2}{4\kappa} .$$

Koristeći diferencijalne oblike jednačine kretanja (14.6) i kontinuiteta (14.2) sledi da je u tački C kritično strujanje sa $M = 1$. Prema tome ispod tačke C strujanje je nadzvučno a iznad dozvučno. Proces zagrevanja gasa pri dozvučnom strujanju je od tačke 1 ka tački 2, a kod nadzvučnih strujanja od 3 ka 4. Proces hlađenja je suprotnog smera – kod dozvučnih strujanja od 2 ka 1, a kod nadzvučnih od tačke 4 ka tački 3.



Slika 14.27: Rejljeva kriva.

14.8. JEDNODIMENZIJSKO STRUJANJE GASA SA TRENJEM

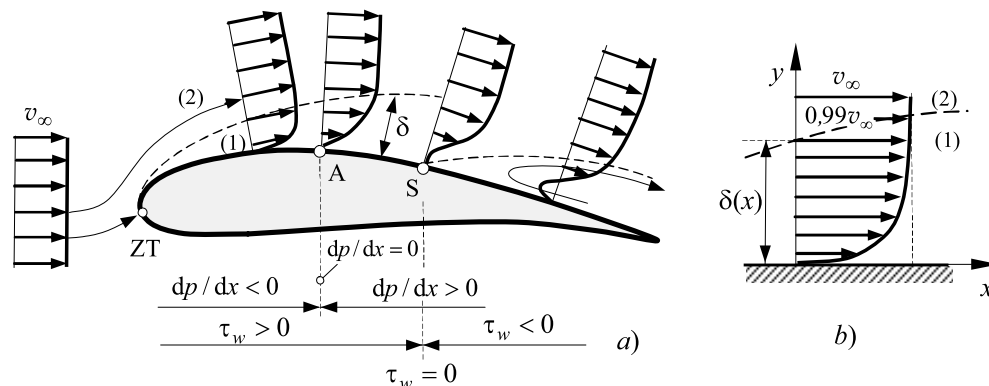
Cevovodi kroz koje struji gas nazivaju se gasovodi, a u užem smislu reči pod gasovodima se podrazumevaju magistralni cevovodi kojima se transportuje prirodan gas. Dužina gasovoda je velika, ne retko i nekoliko hiljada kilometara, pa se trenje u njima obavezno uzima u obzir jer ono dominantno utiče na strujanje. Čak i kada gas struji kroz mnogo kraće cevi, kao npr. kroz pneumatske vodove za razvod komprimovanog vazduha u fabričkim instalacijama, trenje mora da se uzme u obzir. Standardni modeli strujanje gasa sa trenjem u cevima su izotermno i adijabatsko strujanje. Za strujanje u cevima, a prema izrazu (14.25) ireverzibilni deo količine toplote koji potiče od trenja:

$$ds_{IR} = \frac{\delta q_{IR}}{T} = \frac{\tau_w O}{\rho A T} dx = \frac{\lambda}{D} dx \frac{v^2}{2T} > 0 , \quad (14.25)$$

dovodi do porasta entropije, jer kod realnih strujanja uvek je: $\lambda D/dx > 0$, a strujanje je disipativno neizentropsko. O koeficijentu trenja, kod nestišljivih strujanja fluida, bilo je

15. LAMINARNI GRANIČNI SLOJ

U praksi postoje brojni slučajevi kada je neko telo u kontaktu sa fluidom na način da fluid miruje a telo se kreće, npr. automobili, avioni, brodovi, vozovi itd.; ili se fluidom opstrujava nepokretno telo, npr. građevinski objekti. Tom prilikom inženjersko interesovanje jeste da se nađe strujno polje i odredi sila otpora i sl. Za isto telo koje miruje a fluid ga opstrujava brzinom v_∞ , ili se telo kreće brzinom v_∞ a fluid miruje, strujna slika oko tela koje miruje i strujna slika relativnog strujanja oko tela koje se kreće je identična, pa će se na dalje analizirati slučaj koji je jednostavniji za razumevanje a to je kada telo miruje a fluid ga opstrujava. Suštinsku analizu opstrujavanja tela prvi je dao Ludwig Prandtl 1904. god. On je strujanje preko čvrste granice podelio na: (1) poremećenu i (2) neporemećenu oblast. Poremećena oblast je tanka oblast u blizini zida opstrujavanog tela u kojoj su prisutni gradijenti brzine, odnosno viskozni naponi dolaze do izražaja, i tu oblast Prantl naziva *granični sloj*, a dalje od zida viskoznost nema uticaja na strujanje i fluid se smatra neviskoznim. Prantlov koncept graničnog sloja je jedan od velikih rezultata mehanike fluida jer se njime realno strujanje deli na viskoznu i neviskoznu oblast, a kako će se kasnije u ovom Poglavlju pokazati sistem jednačina u graničnom sloju ima značajno jednostavniji oblik što olakšava njegovo rešavanje. Uzmimo jedno ravansko telo koje miruje, neka to bude aeroprofil¹ sa Sl. 15.1 koji je opstrujavan neporemećenom strujom fluida brzine v_∞ . U odnosu na prednju



Slika 15.1: Strujanje u graničnom sloju.

zaustavnu tačku ZT dolazeća fluidna struja deli se na dve, jednu sa gornje i drugu sa donje strane tela. Za proučavanje fizičkog fenomena dovoljno je posmatrati samo jednu, npr. gornju stranu tela. Telo u fluidnoj struji izaziva poremećaj koji se manifestuje promenom brzine u strujnom polju, gde u odnosu na zaustavnu tačku ZT, u kojoj je brzina $v = 0$ i pritisak totalni p_0 , nizstrujno se fluidna struja ubrzava a pritisak opada,

¹ Granični sloj na opstrujavanom telu je tanak, a radi ilustracije debljine δ ona je na Sl. 15.1 prikazana znatno većom.

tj. strujanje je praćeno negativnim gradijentom pritiska ($dp/dx < 0$). Pritisak u nekom nizstrujnom preseku (tačka A na Sl. 15.1) ima minimalnu vrednost, tj. gradijent je $dp/dx = 0$, a od njega nizstrujno pritisak raste ($p \uparrow, dp/dx > 0$) a brzina opada ($v \downarrow$). Uzmimo proizvoljni presek ortogonalan na opstrujavano telo i nacrtajmo profil brzina, pri čemu je brzina strujanja na zidu $v = 0$, a viskozni napon je $\tau_w = \eta(\partial v/\partial y)_{y=0}$. U zoni porasta pritiska i usporavanja struje gradijent brzine opada što izaziva opadanje viskoznog napona na zidu, sve do jednog preseka u kome je $\tau_w = 0$. Tačka S na telu u kojoj je viskozni napon $\tau_w = 0$ naziva se *tačka odvajanja* fluidne struje, ili tačka odvajanja graničnog sloja, i ona je karakteristična jer nizstrujno u odnosu na nju na profilu brzina postoji povratno strujanje sa $\tau_w < 0$, odnosno formira se vrtlog u blizini zida. U tački S tangenta na profilu brzina se poklapa sa pravcem normale opstrujavanog tela. Strujanje posle tačke odvajanja u recirkulacionoj zoni često je praćeno nestabilnostima i prelaskom laminarnog u turbulentno strujanje gde je za proraćun strujanja potrebno koristiti drugaćiji-složeniji model. Postojanje recirkulacione zone iznad zida opstrujavanog tela nepovoljno utiće jer povećava silu otpora. Negativni efekat odvajanja struje može se rešiti «kontrolom» graničnog sloja, tj. njegovim usisavanjem, što odlaže ili eliminiše tačku odvajanja. U proizvoljno izabranom preseku između zaustavne tačke i tačke odvajanja struje profil brzina izgleda kao na Sl. 15.1b. U njemu se brzina menja od $v = 0$, za $y = 0$, do neporemećene brzine $v \rightarrow v_\infty$ za $y \rightarrow \infty$. Teorijski uslov za brzinu $v \rightarrow v_\infty$ za $y \rightarrow \infty$, kada se brzina asimptotski približava brzini neporemećene struje inženjerski nije prihvatljiv, već se na profilu brzina uočava tačka gde se brzina neporemećene struje v_∞ razlikuje od stvarne brzine v za neki unapred dogovoreni procenat. Konvencionalno je usvojena greška od 1%, pa ortogonalno rastojanje $y_{99\%} = \delta$ na kome brzina strujanja ima vrednost 99% od brzine neporemećene struje ($v = 0,99v_\infty$) naziva se *debljina graničnog sloja*. U analizi strujanja u graničnom sloju ova debljina ima krucijalnu ulogu jer upravo ona čini granicu između viskozne i neviskozne, ili vrtložne i nevrtložne, odnosno poremećene i neporemećene oblasti.

U odnosu na zaustavnu tačku celom dužinom tela strujanje u graničnom sloju može biti laminarno i tada koristimo termin laminarni granični sloj. Međutim, veoma često posle zaustavne tačke na nekom rastojanju strujanje je laminarno, zatim usled nestabilnosti postoji prelazna oblast, a posle prelazi u turbulentno, tako da u opštem slučaju postoji laminarni i turbulentni granični sloj. Strujanje u turbulentnom graničnom sloju ima znatno složeniju strukturu u odnosu na laminarni granični sloj.

15.1. PRANTLOVE JEDNAČINE

Teorija graničnog sloja koja se ovde izlaže važi od zaustavne tačke do tačke odvajanja graničnog sloja (Sl. 15.1a). Za dalju analizu uvedimo pretpostavke da je strujanje: 1) nestišljivo, 2) stacionarno, 3) dvodimenzijnsko (v_x, v_y i $v_z = 0$), 4) ravansko ($\partial f/\partial z = 0, f = p, v_x, \dots$), 5) zapreminske sile su zanemarljivo male, i 6) viskoznost fluida je konstantna. Za ovo strujanje važe jednaćine kretanja i kontinuiteta:

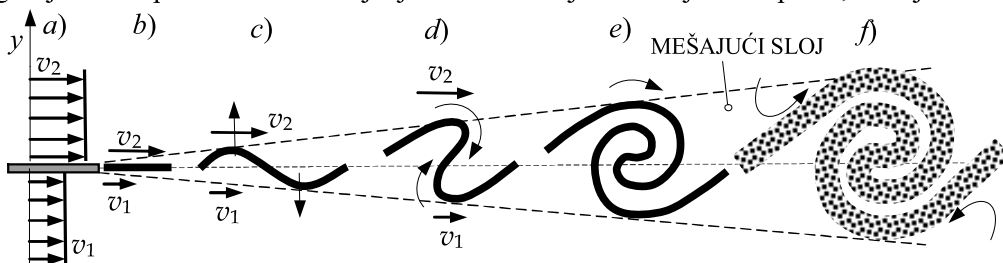
turbulencije, a koje mogu da nam približe problem koji proučavamo:

- Turbulencija je vrtložno strujanje koje sadrži vrtloge različitih veličina.
 - Turbulentno strujanje je haotični sistem sa mnogo stepeni slobode.
 - Turbulentno strujanje je: nestacionarno, trodimenzijsko, nepredvidivo, disipativno strujanje kod koga sve fizičke veličine imaju slučajni karakter, i kod njega se u svakoj tački strujnog prostora mogu definisati srednje statističke vrednosti strujnih veličina.
- Imajući u vidu da je turbulentno strujanje nestabilno i disipativno to sledi da je ono uvek ireverzibilno. Takođe, turbulentno strujanje može biti nestišljivo i stišljivo.

Na kraju ovog uvođenja u svet turbulencije interesantno je navesti šta su veliki fizičari i dobitnici Nobelove nagrade rekli o turbulenciji. Nemački fizičar Werner Heisenberg kaže: "Kada umrem, postaviću Bogu dva pitanja: Šta je relativnost? Šta je turbulencija? Siguran sam da će odgovoriti na prvo pitanje.". Američki fizičar Richard Feynman kaže: „Turbulencija je najveće nerešeno pitanje klasične fizike.“

16.1. NASTAJANJE TURBULENTNOG STRUJANJA

U Poglavlju 3.13 već je navedeno da postoje tri režima strujanja: laminarni, prelazni i turbulentni. Dva osnovna režima strujanja su laminarni i turbulentni, pri čemu je jedan "mirni"-laminarni i drugi "nemirni"-turbulentni. Prelazak iz laminarnog u turbulentno strujanje može se objasniti nestabilnostima laminarnog strujanja. Postoje različiti tipovi poremećaja koji mogu biti uzrok nastanka turbulentnog strujanja, kao npr.: promena strujne geometrije, promena visine hrapavosti zida, gradijenti brzine, pritiska ili temperature, spoljašnji akustični izvori, hemijska reakcija, elektromagnetno polje, itd. Ovde će se navesti samo lako razumljive Kelvin-Helmholcove nestabilnosti nastale u mešajućem sloju. Posmatrajmo dvodimenzijsko strujanje preko ravne ploče, sa Sl. 16.2a, koje se odvija različitim srednjim brzinama v_1 i v_2 ($v_2 > v_1$) sa donje i gornje strane ploče. Usled odvajanja fluidnih struja sa zadnje ivice ploče, nastaje



Slika 16.2: Nastanak turbulentnog strujanja.

smicajno strujanje, a fluidne struje se mešaju. Oblast mešanja fluidnih struja u kojoj su prisutne intenzivne promene brzine (gradijenti brzine) naziva se *mešajući sloj* ili *smicajni sloj*. Izdvojimo jedan sloj pravilnog oblika sa Sl. 16.2b koji se nalazi neposredno posle odvajanja struja sa ploče, i koji predstavlja površ diskontinuiteta-razdvajanja struja koje se kreću različitim brzinama. Stabilnost ovog sloja se narušava jer se sa gornje i donje strane nalaze fluidni deliци koji se kreću različitim brzinama, te će se početni sloj prvo zatalasati (Sl. 16.2c), a kako i dalje važe isti smicajni uslovi deformacija je sve veća i veća, sve dok ne počne rotacija fluida (Sl. 16.2d). Ova rotacija dovodi do formiranja ravanskog vrtloga spiralnog oblika (Sl. 16.2e), koji se naziva

Kelvin-Helmholčev vrtlog. Nestabilnosti u smicajnom sloju koje su dovele do formiranja vrtloga nazivaju se Kelvin-Helmholčeve nestabilnosti. Nastali vrtlog u mešajućem sloju nizstrujno raste, i dalje ima spiralni oblik (Sl. 16.2f), ali njegova struktura postaje složenija jer on usisava okolni fluid uz formiranje manjih vrtloga. Na ovaj način formira se strujanje sastavljeno od velikog broja vrtloga koje se naziva turbulentno. U prirodi primeri Kelvin-Helmholčevih nestabilnosti i formiranje vrtložnih struktura su brojni: kod atmosferskih strujanja koja se odvijaju između slojeva različitih brzina ili različitih temperatura, strujanjem vazduha-duvanje vetra preko morske površine-formiranje talasa, kod mešajućih slojeva različitih temperatura, ušća reka koje teku različitim brzinama i sl. Smicajna strujanja, ili polja intenzivne promene brzine, tj. prisustvo intenzivnih gradijenata brzine, mogu se uočiti i u drugim-brojn timer primerima tehničke prakse: iza opstrujavanih tela (aeroprofila, automobila, brodova i sl.) i građevinskih objekata, u cevima kada su prisutne promene geometrije (krivine, račve, nagla proširenja, ventili, slavine itd.), u strujnim mašinama itd. U svim navedenim primerima formiraju se vrtložne strukture koje čine turbulentno strujanje. Može se reći da turbulentno strujanje nastaje i održava se postojanjem gradijenata brzine u mešajućim slojevima.



Slika 16.3: Formiranje vrtloga. Umetnička fotografija – vizualizacije dimom, Brennan (2005)

Sličnu strukturu formiranja Kelvin-Helmholčevog vrtloga i početak formiranja složenijih struktura vrtložnih cevi mogu se videti na umetničkoj fotografiji Brennan-a sa Sl. 16.3 koja je dobijena fotografisanjem apstrakcije dima, što nije ništa drugo do vizualizacija strujanja. Sa gornjeg dela fotografije vidi se da se struktura Kelvin-Helmholčevog vrtloga narušava. Naime, u centru vrtloga pritisak je manji od okolnog što izaziva usisavanje okolnog fluida i deformisanje centralnog dela vrtložne cevi.

16.2. TEORIJA KOLMOGOROVA

Kod turbulentnog strujanja prisutni su vrtlozi različitih veličina od najvećih (makrovrtloga) do najmanjih (mikrovrtloga). Veličina, ili razmera L , najvećih vrtloga može biti dimenzija strujnog prostora npr. prečnika cevi ili visine stepenika kod naglog proširenja. Veličina najvećih vrtloga nije definisana i u zavisnosti od najveće dimenzije strujnog prostora razmera najvećih vrtloga može biti od nekoliko milimetara ili metara u cevima i kanalima, do reda veličine većeg od 1000 km kod atmosferske turbulencije, ili npr. na Jupiteru “crvene pege” predstavljaju makrovrtloge (mega vrtloge) dimenzija po kraćoj osi 12000-14000 km i po dužoj osi 24000-40000 km (Sl. 16. 4.) sa brzinama strujanja reda veličine 1000 km/h. Sa ove fascinantne fotografije vizualizacije strujanja između slojeva koji se kreću različitim brzinama jasno se mogu uočiti vrtlozi oblika Kelvin-Helmholca. Pri kretanju, bez obzira na način nastajanja, veliki vrtlozi se zbog nestabilnosti raspadaju na manje sve do najmanjih kada viskoznost fluida ne dozvoljava dalje raspadanje vrtloga. Na kraju procesa raspadanja vrtloga dobija se razmera λ

$$\frac{\lambda}{L} = \sqrt{15} \operatorname{Re}_L^{-1/2} . \quad (16.11)$$

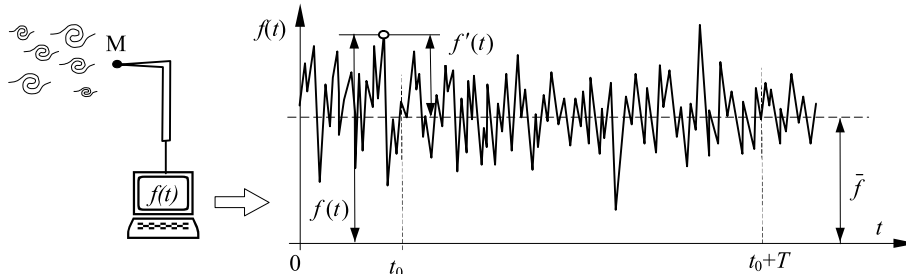
Konačno, koristeći izraze (16.8) i (16.11) dobija se veza između razmera mikrovrtloga Tejlora i Kolmogorova:

$$\frac{\lambda}{\eta} = \sqrt{15} \operatorname{Re}_L^{1/4} ,$$

iz koje sledi da je za izotropnu turbulenciju i istu vrednost Rejnoldsovog broja razmera mikrovrtloga Tejlora mnogo manja od razmere Kolmogorova, štaviše one nisu istog reda veličine.

16.3. REJNOLDSOVA STATISTIKA

U proizvoljnoj fiksnoj tački M turbulente fluidne struje, definisane vektorom položaja \vec{r} , postavimo instrument za merenje neke fizičke veličine $f = v, p, T, \dots$, koja može biti jedna od komponenta brzine, pritisak ili temperatura, Sl. 16.8. Kroz ovu tačku protokom vremena prolaze delovi vrtloga u kojima je sadržana trenutna vrednost fizičke veličine različitog intenziteta $f(\vec{r}, t)$, a vremenski zapis ove veličine izgleda kao na Sl. 16. 8. Sa ove slike se uočava nepravilnost mernog signala i slučajni karakter



Slika 16.8: Stohastički zapis strujne veličine $f(t)$.

fizičke veličine. Ova osobina slučajnog karaktera fizičkih veličina vodi ka ideji: da se lokalno turbulentno strujanje analizira statistički. Ideju primene *lokalne statističke teorije* u analizi turbulentnih strujanja predložio je Rejnolds 1894. god. On je stvarno vremenski promenljivo lokalno polje fizičke veličine $f(\vec{r}, t)$, koja može biti skalar, vektor ili tenzor, razložio na polje prosečne (ili osrednjene)³ vrednosti \bar{f} i fluktaciono polje $f'(t)$, kao:

$$f(\vec{r}, t) = \bar{f}(\vec{r}) + f'(\vec{r}, t) , \quad (16.12)$$

gde je prosečna vrednost u toku vremena merenja T matematički definisana kao:

$$\bar{f}(\vec{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{r}, t) dt .$$

³ Termin *srednja* brzina koristi se za osrednjavanje po preseku, izraz (3.21), dok se za srednju brzinu po vremenu u tački strujnog prostora koriste ravnopravni termini – *prosečna* ili *osrednjena* brzina. Isto važi i za druge fizičke veličine. Polje fizičkih veličina dobijeno vremenskim osrednjavanjem veličina naziva se srednje ili osrednjeno turbulento polje.

$$P = -\rho \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$$

predstavlja produkciju turbulentne energije. U standardnom k - ε modelu konstante u transportnim jednačinama (16.42) su:

$$C_\eta = 0,09 ; \sigma_\varepsilon = 1,3 ; C_{\varepsilon 1} = 1,44 ; C_{\varepsilon 2} = 1,92 ; C_k = 1 .$$

Model k - ε je najčešće korišćeni inženjerski model proračuna turbulencije.

16.6.8. Model k - ω

Turbulentna viskoznost k - ε modela, izraz (16.41), može da se napiše kao:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (16.43)$$

gde je

$$\omega = \frac{1}{C_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} .$$

Ovako definisana veličina ω zamenjuje disipaciju ε , i ima dimenziju s^{-1} i zato može da se nazove *frekvencija disipacije* ili *specifična disipacija*. Za definisanje turbulentne viskoznosti (16.43) potrebne su dve dopunske jednačine za k i ω . Ovaj dvojednačinski model naziva se model Vilkoksa (Wilcox) i datira iz 1988. godine, mada je njegove osnove postavio Kolmogorov 1942. godine. Dve dopunske transportne jednačine za kinetičku energiju turbulencije i za specifičnu disipaciju glase:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = P - \rho \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \rho \alpha \frac{\omega}{k} P - \rho \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$$

gde konstante standardnog k - ω imaju vrednosti:

$$\alpha = 5/9 ; \beta = 3/40 ; \beta^* = 0,09 ; \sigma_k = 2 ; \sigma_\omega = 2 .$$

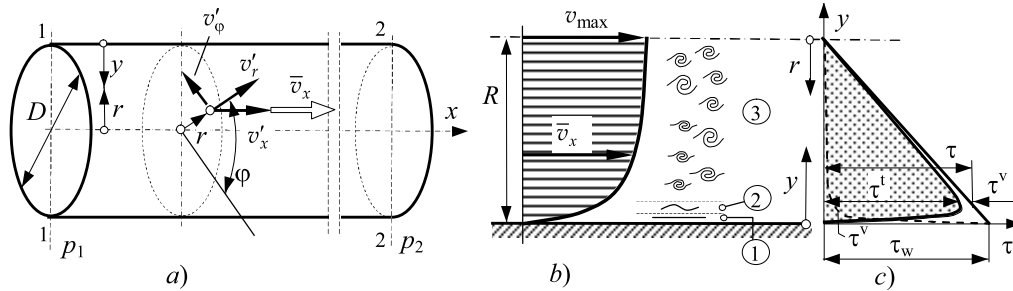
Dvojednačinski modeli k - ε i k - ω imaju istu transportnu jednačinu za kinetičku energiju turbulencije, a do viskozne disipacije ε modelom k - ε dolazi se direktno, dok modelom k - ω posredno. Model k - ω daje bolje rezultate simulacije u blizini zida, dok model k - ε daje bolje rezultate dalje od čvrste granice. Za numeričku simulaciju istog strujanja modeli k - ε i k - ω daju slične rezultate, pri čemu se smatra da je model k - ε ekonomičniji jer je za proračun potrebno manje računarskog vremena.

16.7. TURBULENTNO STRUJANJE U CEVIMA

Turbulencija u dugačkim pravolinijskim cevima i kanalima pri visokim vrednostima Reynoldsovog broja, koja se odvija u pravcu strujanja, statistički je uravnotežena i naziva se *potpuno razvijena turbulencija*, ili kraće razvijena turbulencija, što znači da je u svakom nizstrujnom preseku cevi isti profil prosečne brzine, tzv. *razvijeni profil*. Osnovni interes inženjerske primene turbulentnog strujanja jeste analiza

strujanja u pravolinijskim cevima kružnog poprečnog preseka, i poznavanje profila brzina, napona na zidu i koeficijenta trenja. Odgovor na ova pitanja daje *poluempirijska teorija turbulencije*, ili tzv. klasična teorija turbulencije, koja je bazirana na pojednostavljenom teorijskom modelu u kome se izvesni koeficijenti određuju eksperimentalno. Ova klasična teorija pripada grupi algebarskih modela turbulencije sa nula dopunskih jednačina.

Posmatrajmo stacionarno ($\partial f / \partial t = 0$), osnosimetrično ($\partial f / \partial \varphi = 0$), prosečno strujanje u cevi kružnog poprečnog preseka, prečnika $D = 2R$ sa Sl. 16.13a.



Slika 16.13: Troslojna šema turbulentnog profila brzine.

Komponente prosečne brzine su: $\bar{v}_x = \bar{v}$, $\bar{v}_r = \bar{v}_\varphi = 0$, dok su komponente turbulentnih napona: $\overline{v'_x v'_\varphi} = 0$ i $\overline{v'_r v'_\varphi} = 0$. Ovo strujanje opisano je Rejnoldsovim jednačinama i jednačinom kontinuiteta, koje u polarno-cilindričnim koordinatama glase:

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \rho \overline{v_r'^2}) + \rho \overline{v_\varphi'^2} \right] ; \quad 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (\eta \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \rho \overline{v'_x v'_r}) \right], \quad (16.44), (16.45)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (16.46)$$

Iz jednačine (16.46) sledi da brzina \bar{v} ne zavisi od koordinate x , tj. da je funkcija samo od poprečne koordinate r ili y : $\bar{v} = \bar{v}(r) = \bar{v}(y)$. Jednačina osrednjenog strujanja (16.44) transformiše se na oblik:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\bar{p} + \rho \overline{v_r'^2}) = -\frac{1}{r} \rho (\overline{v_\varphi'^2} + \overline{v_r'^2}),$$

iz koga se integraljenjem u granicama od r ($p = p(r)$) do R ($p = p_w$, $\overline{v_r'^2} = 0$) dobija promena pritiska u poprečnom preseku:

$$\bar{p}(x, r) = p_w - \rho \overline{v_r'^2} + \rho \int_r^R (\overline{v_r'^2} - \overline{v_\varphi'^2}) \frac{dr}{r}.$$

Ovaj izraz pokazuje da u poprečnom preseku pritisak zavisi i od turbulentnih napona, međutim, ako ga primenimo za zid cevi ($r = R$) pritisak je funkcija samo od podužne koordinate $\bar{p}(x) = p_w(x)$, pa zato važi: $dp_w / dx = \partial \bar{p} / \partial x$, gde indeks w označava zid. Zamenom ove veze u (16.45) dobija se diferencijalna jednačina:

$$\frac{dp_w}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r (\eta \frac{d\bar{v}}{dr} - \rho \overline{v'_r v'_x}) \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau), \quad (16.47)$$

u kojoj je ukupan tangencijalni napon, prema (16.16):

Struktura ovih izraza je ista, i oblika $1/\sqrt{\lambda} = -2 \log(\dots)$. Zadržavanjem formule za koeficijent tranja u obliku $1/\sqrt{\lambda}$ i samo sabiranjem podlogaritamskih funkcija Kolbruk je dobio formulu:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\delta}{3,71D} + \frac{2,51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}\right), \quad (16.73)$$

kod koje koeficijent trenja zavisi od Reynoldsovog broja i od relativne hrapavosti cevi, i koja važi za celokupnu oblast turbulentnog strujanja u cevima. Koristeći Kolbrukovu formulu Mudi je konstruisao dijagram $\lambda = \lambda(\text{Re}, \delta/D)$, koji je detaljno objašnjen u Poglavlju 10.6.3, a služi za određivanje koeficijenta trenja u cevima.

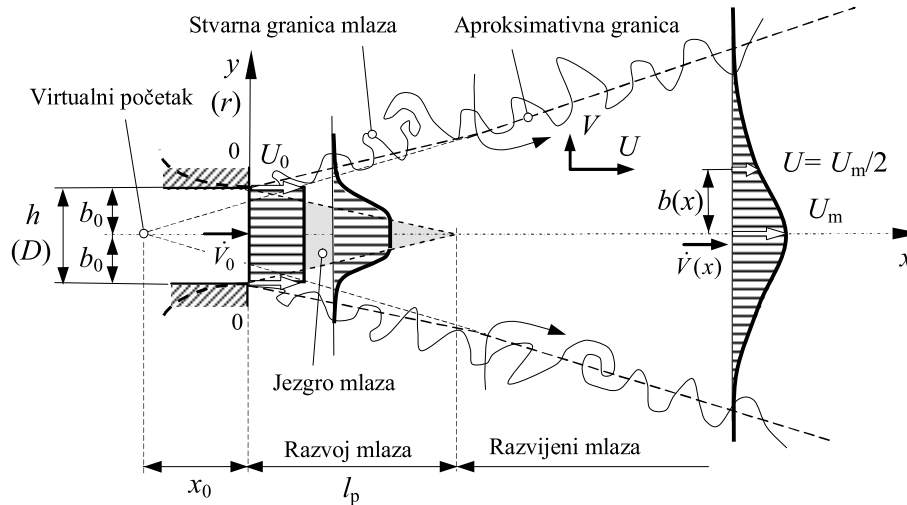
16.9. SLOBODAN TURBULENTNI MLAZ

Ističući mlaz fluida ima brojne primene u: energetici, vazduhoplovstvu, ekologiji, procesnoj, hemijskoj i farmaceutskoj industriji, i sl., tako npr. mlaz izduvnih gasova iz dimnjaka elektrana, fabrika i rafinerija, mlazevi vazduha koji se koriste za grejanje, hlađenje, ventilaciju ili klimatizaciju različitih prostora, mlazevi fluida u raznim tehnološkim procesima, itd. Zbog važnosti primene mlazeva fluida u ovoj oblasti sprovedena su, a i dalje se vrše, brojna istraživanja - teorijska, numerička i eksperimentalna. Mlazevi mogu biti slobodni i zidni. Kod slobodnog turbulentnog mlaza strujanje se odvija u prostoru daleko od čvrste granice, tako da čvrste granice ne utiču na strujanje. Zidni mlaz je onaj kod koga se na jednom delu strujanje odvija preko čvrste granice (npr. ploče) a drugom ima karakter slobodnog mlaza. U zavisnosti od toga kroz kakav otvor nastaje slobodan turbulentni mlaz može biti ravanski i osnosimetrični.

a) Ravanski mlaz

Kada fluid ističe kroz pravougaoni poprečni presek dužine L i visine h tada ako je $L \gg h$ mlaz se smatra ravanskim. Posmatrajmo izotermiski simetrični ravanski mlaz sa Sl. 16.16 koji ističe iz kanala, visine $2b_0$, u okolinu konstantnog pritiska, tj. kada nema gradijenta pritiska ($\partial p / \partial x = 0$). Kroz izlazni presek 0-0 mlaznice ističe mlaz koji daje početni profil brzina mlaza. Ako je isticanju fluida prethodila dobro oblikovana mlaznica može se smatrati da ističući mlaz ima približno uniforman profil brzina konstantne brzine U_0 . Mlaz usisava okolni fluid i nizstrujno se širi. Trenutna granica između mlaza i mirnog-neturbulentnog fluida je nepravilna (v. Sl. 16.1), međutim, može se uvesti statistički srednja granica koja se linearno menja i čiji je virtualni početak na rastojanju $x_0/h = 2 \div 2,5$. Mlaz se može podeliti u dve oblasti i to: razvoja mlaza i razvijenog dela mlaza. Početni deo razvoja mlaza karakterisan je postojanjem tzv. *jezgra mlaza*, ili *potencijalnog jezgra*, pod kojim se podrazumeva oblast u kojoj je brzina konstantna i jednaka U_0 . Kod osnosimetričnog mlaza jezgro je oblika konusa, a kod ravanskog oblika klina. Veličina jezgra ravanskog mlaza zavisi od kvaliteta ulaznog profila brzina, intenziteta turbulencije, Reynoldsovog broja ($\text{Re} = U_0 h / \nu$) i

iznosi $l_p/h = 3 \div 6$. Ukupni ugao širenja mlaza je $24^\circ \div 25^\circ$. Posle jezgra mlaza nastavlja se oblast razvijenog mlaza koja se sastoji od prelaznog dela i *oblasti sličnosti* koja je kod ravanskog mlaza $x/h > 10$, a odnosi se na nizstrujno postojanje sličnih profila brzina.



Slika 16.16: Slobodan ravanski turbulentni mlaz.

U izlaznom preseku fluks količine kretanja mlaza je:

$$M_0 = \dot{m}U_0 = 2b_0\rho LU_0^2 \quad .$$

Imajući u vidu da mlaz ističe u okolinu koja nije ograničena čvrstim zidovima to nema uzroka promene količine kretanja i fluks količine kretanja nizstrujno ostaje konstantna, što je osnovna karakteristika slobodnog mlaza:

$$M(x) = M_0 = 2\rho L \int_0^\infty U^2 dy = 2b_0\rho LU_0^2 = \text{const.} \quad \rightarrow \quad b_0 U_0^2 = \int_0^\infty U^2 dy = \text{const.} \quad (16.74)$$

Ravanski mlaz koji posmatramo neka je: stacionaran, izotermiski, fluid je nestišljiv, ističe u okolinu konstantnog pritiska, u njemu postoje dve komponente prosečne brzine $U = \bar{v}_x$ i $V = \bar{v}_y$, i nema razmene količine toplote sa okolinom. U ovom slučaju polazni sistem jednačina kretanja i kontinuiteta svodi se na:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right] ; \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

S obzirom na činjenicu da su u mlazu turbulentni mnogo veći od viskozni napona, ili preko kinematskih viskoznosti važi da je $v \ll v_t$, to se polazni sistem jednačina svodi na:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (v_t \frac{\partial U}{\partial y}) ; \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (16.75), (16.76)$$

i rešava se uz zadovoljavanje graničnih uslova: