

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ  
Јосиф Вуковић, Александар Обрадовић



# ЛИНЕАРНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА

БЕОГРАД 2007.

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ**

**Јосиф Вуковић**

**Александар Обрадовић**

**ЛИНЕАРНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ  
МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА**

**Машински факултет  
Београд, 2007.**

др Јосиф Вуковић, редовни професор  
др Александар Обрадовић, ванредни професор

## **ЛИНЕАРНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА**

*Рецензенти:*

др Никола Младеновић, редовни професор  
Машинског факултета у Београду  
др Срђан Русов, ванредни професор  
Саобраћајног факултета у Београду

*Главни и одговорни уредник:*

проф. др Милосав Огњановић

*Издавач:*

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
Универзитета у Београду  
ул. Краљице Марије 16, Београд  
тел: 011 3370 760  
факс: 011 3370 364

За издавача:

проф. др Милош Недељковић, декан

*Слог:*

мр Драган Крстић

*Корице:*

Горан Лимић

*Одобрено за штампу одлуком Декана Машинског  
Факултета у Београду, бр. 76/07 од 12.07.2007.*

*Тираж:*

300 примерака

*Штампа:*

ПЛАНЕТА-ПРИНТ, тел/факс: 011 3088 129

ISBN 978-86-7083-602-0

---

*Забрањено прештампавање и фотокопирање.  
Сва права задржава издавач и аутор.*

## ПРЕДГОВОР

*Ова књига садржи градиво обухваћено програмом предмета **Теорија осцилација** на Машинском факултету у Београду и првенствено има уџбенички карактер. Ниво и метод излагања прилагођен је искључиво нивоу знања која студенти претходно могу да стекну из одговарајућих дисциплина на Машинском факултету. Математичко моделирање осцилација механичких система засновано је на основним једначинама аналитичке механике уз коришћење основа матричног рачуна. Овакав приступ омогућио је да теоријско решавање проблема до коначних једначина има алгоритамски карактер, усклађен са софтверским могућностима савремених рачунара. Услед тога, сложеност проблема, која се некада јављала код система са већим бројем степена слободе, постаје потпуно небитна, што је омогућило да се ово излагање растерети од додатног разматрања разних аналитичких и нумеричких метода. С обзиром на уџбеничку намену ове књиге, теоријско излагање је пропраћено бројним примерима и задацима који треба да студентима помогну у лакшем савлађивању градива и упуту их на примену у пракси.*

Београд, 2007.

*Аутори*

## САДРЖАЈ

Увод .....	1
<b>1. Стабилност равнотеже механичког система .....</b>	<b>5</b>
1.1 Дефиниције стабилности стања равнотеже .....	6
1.2 Стабилност равнотеже конзервативног система .....	8
1.2.1 Стабилност равнотеже конзервативног система са једним степеном слободе .....	9
1.2.2 Стабилност равнотеже конзервативног система са више степена слободе .....	10
<b>2. Линеаризација диференцијалних једначина кретања.....</b>	<b>21</b>
2.1 Особине квадратних и билинеарних форми .....	22
2.2 Потенцијална енергија линеарног система. Силвестеров критеријум.....	25
2.3 Кинетичка енергија линеарног система .....	29
2.4 Силе отпора. Дисипативна функција линеарног система .....	35
2.5 Принудне силе .....	47
<b>3. Осцилације конзервативних система .....</b>	<b>57</b>
3.1 Осцилације система са једним степеном слободе.....	57
3.2 Линеарне диференцијалне једначине кретања конзервативног система са коначним бројем степена слободе .....	67
3.3 Карактеристична једначина.....	68
3.4 Фреквентна једначина. Фреквенције.....	70
3.5 Главни облици осцилација. Коefицијенти главних облика осцилација. Модални вектори. Модална матрица .....	76
3.6 Коначне једначине кретања.....	88

## II

3.7 Ортогоналност главних облика осцилација.....	94
3.8 Главне и нормалне координате.....	96
3.9 Конзервативни системи са посебним вредностима сопствених фреквенција.....	105
3.9.1 Случај када су неке сопствене фреквенције једнаке нули.....	105
3.9.2 Случај кад су неке сопствене фреквенције међусобно једнаке.....	111
3.9.3 Случај када неке сопствене фреквенције имају приближне вредности. Самоподрхтавање.....	114
3.10 Осцилације тела на гредним носачима.....	117
<b>4. Пригушене осцилације.....</b>	<b>137</b>
4.1 Пригушене осцилације система са једним степеном слободе.....	137
4.2 Пригушене осцилације система са коначним бројем степена слободе. Линеарне диференцијалне једначине кретања.....	149
4.3 Карактеристична једначина пригушеног кретања.....	152
4.4 Раут-Хурвицов критеријум.....	160
4.5 Коначне једначине пригушеног кретања.....	165
4.6 Пригушено кретање у нормалним координатама. Модално пригушење.....	169
<b>5. Принудне непригушене осцилације.....</b>	<b>171</b>
5.1 Принудне осцилације система са једним степеном слободе.....	172
5.1.1 Просте принудне непригушене осцилације.....	172
5.1.2 Резонанца.....	176
5.1.3 Подрхтавање.....	179
5.1.4 Коефицијент динамичности (динамички фактор појачања).....	180
5.1.5 Сложене принудне осцилације система. Хармонијска анализа.....	183

---

5.2 Принудне осцилације система са коначним бројем степена слободе .....	191
5.2.1 Хармонијска анализа принудних осцилација са коначним бројем степена слободе.....	191
5.2.2 Принудне осцилације у главним координатама.....	194
5.2.3 Динамички абсорбер без пригушења.....	195
5.3 Принудне линеарне осцилације нестационарних система .....	207
<b>6. Принудне пригушене осцилације .....</b>	<b>217</b>
6.1 Принудне пригушене осцилације система са једним степеном слободе .....	217
6.1.1 Просте принудне пригушене осцилације .....	218
6.1.2 Коефицијент динамичности.....	221
6.1.3 Фазни дијаграм.....	223
6.2 Принудне пригушене осцилације система са коначним бројем степена слободе .....	228
6.2.1 Диференцијалне једначине кретања. Принудне осцилације.....	228
6.2.2 Опште решење и коначне једначине кретања принудних пригушених осцилација .....	230
6.2.3 Принудне пригушене осцилације система у главним (нормалним) координатама .....	231
<b>7. Осцилације еластичних тела .....</b>	<b>237</b>
7.1 Попречне (трансверзалне) осцилације затегнуте жице .....	237
7.2 Уздужне (лонгитудиналне) осцилације призматичног тела.....	244
7.3 Увојне (торзионе) осцилације вратила кружног пресека .....	259
7.4 Попречне осцилације призматичних тела.....	266
<b>Литература.....</b>	<b>283</b>

## 7. ОСЦИЛАЦИЈЕ ЕЛАСТИЧНИХ ТЕЛА

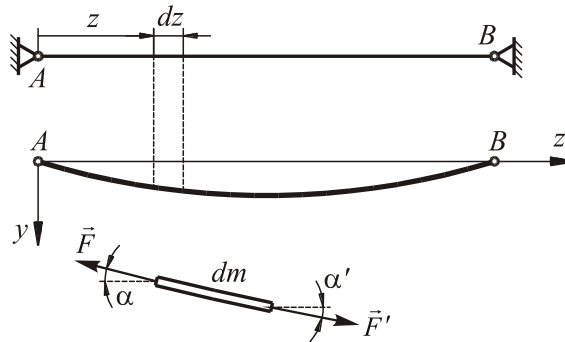
У претходним излагањима разматране су осцилације механичких система са коначним бројем степена слободe, при чему су тела, чија се маса не може занемарити, сматрана идеално крутим. Оваква идеализација има смисла уколико се занемаривањем деформација тих тела добијају резултати који задовољавају практичне потребе. Међутим, уколико деформације тела имају битног утицаја, или саме представљају предмет разматрања, оне се не могу занемарити. У том случају, модел тела је *чврсто тело*, које се деформише под утицајем спољашњих сила. Услед деформабилности таква тела имају *бесконачан број степена слободe* и њихово понашање не може бити описано обичним диференцијалним једначинама. Системи таквих тела припадају тзв. системима са расподељеним параметрима. У случајевима, који ће овде бити разматрани, систем тела представља *систем са расподељеном масом*. Поред тога, разматраће се понашање оних тела која могу да се, са довољном тачношћу, сматрају хомогеним и идеално еластичним. Силе отпора и принуде неће се узимати у обзир. У том смислу, овакви системи су конзервативни. Такође, проучаваће се само тела константног попречног пресека, на чије делиће се дејство спољашњих (запреминских) сила, као што су нпр. силе теже, може занемарити.

### 7.1 Попречне (трансверзалне) осцилације затегнуте жице

Жице, ужад, струне, влакна и сл. представљају тела чије су попречне димензије знатно мање у односу на њихову дужину и која пружају отпор само затезању. Услед тога, смичући напони у попречном пресеку практично не постоје, тако да су доминантни нормални напони који се



јављају као последица затезања жице. Према томе осцилације жице јављају се једино ако се она налази у затегнутом стању. Попречне осцилације жице представљају померање пресека жице управно на њен правац у равнотежном стању, при чему су та померања мала у поређењу са дужином жице. Поред тога, пошто не постоји компонента померања пресека у правцу осе жице, нормални напони у сваком пресеку имају исти интензитет, односно одговарајуће силе затезања у сваком пресеку имају исти интензитет. Нека је у стању равнотеже жица затегнута између тачака А и В тако да у сваком пресеку постоји нормални напон  $\sigma_z = \sigma$ . Ако се, за проучавање попречних осцилација, издвоји произвољни делић жице елементарне дужине  $dz$  и масе  $dm$  (сл.7.1), тада је његов положај одређен померањем  $y$ .



Слика 7.1

На делић делују силе  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  једнаких интензитета и правца одређених угловима  $\alpha$  и  $\alpha' = \alpha + d_z \alpha$  које граде тангенте на жицу у односу на њен правац у равнотежном положају. Положај сваке тачке на жици (односно њеног пресека) одређен је координатом  $z$ , а њено померање  $y$  у односу на равнотежни положај координатом  $y$ , тако да померање сваке тачке на жици одређује њен облик у произвољном тренутку времена. Према томе, функција:

$$y = y(z, t) \quad (7.1.1)$$

у потпуности одређује понашање жице и њено одређивање представља основни циљ.

Ако се кретање елементарног делића посматра као кретање елементарног дела масе  $dm$  под дејством сила  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  једнаких интензитета ( $|\vec{F}| = |\vec{F}'| = F$ ) тада је:

$$\vec{a} dm = \vec{F}' + \vec{F}$$

односно после пројектовања на  $Oy$  осу:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm = F \sin(\alpha + d_z \alpha) - F \sin \alpha \quad (7.1.2)$$

Прираштај  $d_z \alpha$  одговара прираштају  $dz$ , тако да је:

$$\sin(\alpha + da) - \sin \alpha = d_z(\sin \alpha) = \frac{\partial}{\partial z}(\sin \alpha) dz.$$

Померања  $y$  су мала у поређењу са дужином жице, па су мали и углови нагиба  $\alpha$ , тако да је:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial z}, \quad d_z(\sin \alpha) = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz.$$

Како су:

$$dm = \rho dV = \rho A dz, \quad F = A \sigma,$$

где су:  $A$  – површина попречног пресека жице,  $\rho$  – густина,  $\sigma$  – напон у попречном пресеку жице, диференцијална једначина (7.1.1) добија облик:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \quad \left( c^2 = \frac{\sigma}{\rho} \right), \quad (7.1.3)$$

где је  $c$  тзв. брзина простирања таласа, која има константну вредност за хомогене жице константног пресека.

Једначина (7.1.3) представља диференцијалну једначину линеарних попречних осцилација затегнуте жице. Решење ове једначине у облику функције (7.1.1) представља једначину кретања жице, односно промену њеног облика током времена. Партикуларно решење једначине (7.1.3) тражи се у облику производа двеју функција:

$$y = Z(z)T(t), \quad (7.1.4)$$

тако да су:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{d^2 Z}{dz^2} T = Z'' T, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Z \frac{d^2 T}{dt^2} = Z \ddot{T}.$$

Заменом ових парцијалних извода у једначину (7.1.3) добија се:

$$Z \ddot{T} - c^2 Z'' T = 0 \quad (7.1.5)$$

односно, после раздвајања променљивих:

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = h, \quad (7.1.6)$$

где је  $h$  има константну вредност, јер једино у том случају могу бити једнаке две функције, од којих једна зависи само од независно променљиве  $z$  а друга само од независно променљиве  $t$ . На тај начин једначина (7.1.5) еквивалентна је једначинама:

$$Z'' - hZ = 0, \quad \ddot{T} - hc^2 T = 0. \quad (7.1.7)$$

Облик решења ових једначина зависи од знака константе  $h$ , тј:

$$\begin{aligned} 1) \quad h = 0: \quad Z &= Cz + D, \\ 2) \quad h = k^2 > 0: \quad Z &= C \cosh(kz) + D \sinh(kz), \\ 3) \quad h = -k^2 < 0: \quad Z &= C \cos(kz) + D \sin(kz). \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Партикуларно решење (7.1.4) мора да задовољава услове да су на крајевима жице ( $z = 0$ ,  $z = l$ ) померања једнака нули, тј:

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0, \quad y(l, t) = 0 \Rightarrow Z(l) = 0. \quad (7.1.9)$$

Међу решењима (7.1.8) ове услове може да испуњава само хармонијска функција 3) што значи да константа  $h$  има негативну вредност, па једначине (7.1.7) добијају облик:

$$Z'' + k^2 Z = 0, \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (\omega^2 = k^2 c^2), \quad (7.1.10)$$

чија су општа решења:

$$Z = C \cos(kz) + D \sin(kz) \quad (7.1.11)$$

$$T = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (7.1.12)$$

Када се на (7.1.11) примене гранични услови (7.1.9), из првог услова добија се:

$$Z(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad (7.1.13)$$

а из другог услова, због нетривијалности решења ( $D \neq 0$ ), добија се једначина:

$$\sin(kl) = 0, \quad (7.1.14)$$

чија су решења:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (7.1.15)$$

На тај начин, с обзиром на (7.1.11) и (17.1.2), сваком природном броју  $n$  одговара по једно решење:

$$Z_n = D_n \sin(k_n z) \quad (7.1.16)$$

$$T_n = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad \left( \omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{l} \right), \quad (7.1.17)$$

односно, с обзиром на (7.1.4), једно партикуларно решење

$$y_n = [A'_n \cos(\omega_n t) + B'_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n z), \quad (7.1.18)$$

где су константе:  $A'_n = A_n D_n$ ,  $B'_n = B_n D_n$ .

Опште решење парцијалне једначине (7.1.3) представља линеарну комбинацију партикуларних решења (7.1.18), тј. :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cos(\omega_n t) + B'_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n z), \quad (7.1.19)$$

односно:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin(k_n z) \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad (7.1.20)$$

где су:

$$R_n = \sqrt{A_n'^2 + B_n'^2}, \quad \alpha_n = \arctg \frac{B_n'}{A_n'}. \quad (7.1.21)$$

Константе  $A'_n, B'_n$  у решењу (7.1.19), односно  $R_n, \alpha_n$  у (7.1.20), одређују се на основу познатог стања жице у неком тренутку.

Функција  $R_n \sin(k_n z)$  представља амплитудну функцију  $n$ -тог облика осциловања (сл.7.2) као скуп амплитуда свих пресека жице.

Стање жице одређено је њеним обликом и брзинама њених тачака.

Ако је у почетном тренутку ( $t_0 = 0$ ) познато стање жице, тј:

$$t_0 = 0, \quad y(z, 0) = f(z), \quad \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \Phi(z), \quad (7.1.22)$$

на основу (7.1.19) добија се:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) = f(z), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) = \Phi(z). \quad (7.1.23)$$

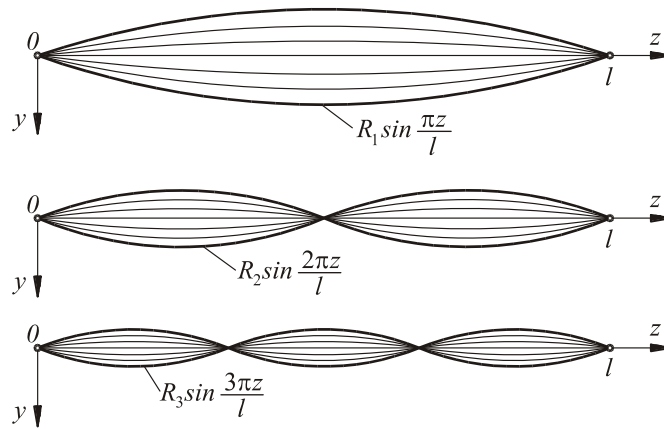
Одавде се константе  $A'_n$ ,  $B'_n$  одређују коришћењем следеће особине ортогоналности хармонијских функција:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}z\right)dz = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2}l & m = n \end{cases}, \quad (m, n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (7.1.24)$$

Множењем једначина (7.1.23) функцијом  $\sin\left(\frac{m\pi}{l}z\right)$  и интегралењем у интервалу  $[0, l]$ , с обзиром на (7.1.24), добијају се следећи изрази за израчунавање константи:

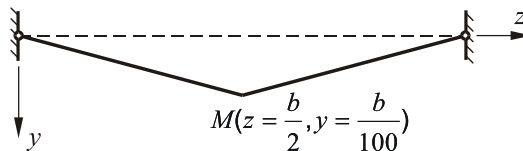
$$A'_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right) dz, \quad B'_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l \Phi(z) \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right) dz. \quad (7.1.25)$$

Заменом овако израчунатих константи у опште решење (7.1.19) односно (7.1.20) добија се коначна једначина осцилација затегнуте жице. Теоријски осцилације жице представљају слагање бесконачно хармоника. Међутим, показује се да са порастом реда хармоника  $n$  амплитуде опадају, тако да је за практичне потребе довољно узети коначан број нижих хармоника. На слици 7.2 приказана су прва три.



Слика 7.2

**Пример 7.1.1** : Одредити трансверзалне осцилације затегнуте струне дужине  $b$ , ако је почетни положај струне, у коме је она мировала, дат на сл. 7.3. Позната је густина материјала струне  $\rho$  и напон у струни  $\sigma$ .



Слика 7.3

**Решење:** Пошто је струна мировала у почетном тренутку, а распоред померања је дат на слици, почетни услови кретања имају облик:

$$y(z,0) = f(z) = \begin{cases} \frac{z}{50}, 0 \leq z \leq \frac{b}{2} \\ \frac{1}{50}(b-z), \frac{b}{2} \leq z \leq b \end{cases} \quad \dot{y}(z,0) = \Phi(z) = 0. \quad (1)$$

Кружне фреквенције (7.1.10) су:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{b} c = \frac{n\pi}{b} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}. \quad (2)$$

Константе интеграције износе:

$$A'_n = \frac{2}{b} \int_0^{b/2} \frac{z}{50} \sin \frac{n\pi z}{b} dz + \frac{2}{b} \int_{b/2}^b \frac{b-z}{50} \sin \frac{n\pi z}{b} dz = \frac{2b}{25n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, B'_n = 0, \quad (3)$$

тако да је једначина осциловања струне:

$$y(z,t) = \frac{2b}{25\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi z}{b} \cos \frac{n\pi}{b} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} t. \quad (4)$$

**Пример 7.1.2** Одредити трансверзалне осцилације затегнуте струне дужине  $l$  ако су почетна померања и брзине дате изразима:

$$y(z,0) = f(z) = y_0 \sin \frac{2\pi z}{l}, \dot{y}(z,0) = \Phi(z) = v_0 \sin \frac{5\pi z}{l}. \quad (1)$$

Позната је густина струне  $\rho$ , површина попречног пресека  $A$  као и интензитет силе  $F$  којом је струна затегнута.

**Решење:** Узимајући у обзир услове (7.1.24) константе интеграције износе:

$$A'_n = \frac{2}{l} \int_0^l y_0 \sin \frac{2\pi z}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \begin{cases} y_0, n = 2 \\ 0, n \neq 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$B'_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l v_0 \sin \frac{5\pi z}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \begin{cases} \frac{v_0}{\omega_5} = \frac{v_0 l}{5\pi} \sqrt{\frac{\rho A}{F}}, n = 5 \\ 0, n \neq 5 \end{cases}$$

тако да је коначна једначина осцилација:

$$y(z,t) = y_0 \sin \frac{2\pi z}{l} \cos \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} t + \frac{v_0 l}{5\pi} \sqrt{\frac{\rho A}{F}} \sin \frac{5\pi z}{l} \sin \frac{5\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} t, \quad (3)$$

из које се види да струна, за задате почетне услове, има само други и пети главни облик осциловања.

## 7.2 Уздужне (лонгитудиналне) осцилације призматичног тела

Разматраће се хомогено еластично призматично тело које има једну димензију (дужину  $l$ ) знатно већу од остале две, које представљају димензије попречног пресека. Посматраће се понашање оваквог тела када се поремети његово равнотежно стање тако што се изазове померање његових тачака у правцу уздужне осе. При томе, разматрани модел представља следећу идеализацију:

- попречни пресеци остају равни и управни на уздужну осу, за све време кретања, тј. све тачке једног попречног пресека имају иста померања,
- занемарује се промена димензија попречног пресека у односу на његово померање,
- деформације, које се јављају у току кретања, не прелазе границу области за коју важи линеарни Хуков закон.

Ако се у правцу уздужне осе тела постави координатна оса  $Oz$  и ако се посматра произвољни попречни пресек, чији је положај у телу одређен координатом  $z$ , померање  $w$  било које тачке пресека представља његову translацију описану функцијом:

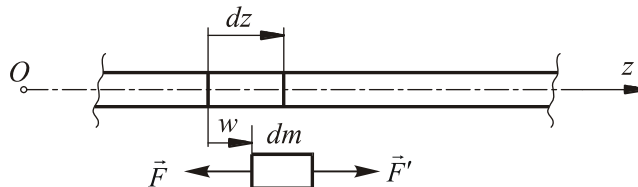
$$w = w(z, t) \quad 0 \leq z \leq l. \quad (7.2.1)$$

Деформације  $\varepsilon_z$  и одговарајући нормални напони  $\sigma_z$  који се при томе јављају су:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (7.2.2)$$

где је  $E$  – модул еластичности.

Функција (7.2.1) потпуно одређује понашање датог модела тела, тако да њено одређивање представља крајњи циљ решавања постављеног задатка. У том смислу, посматра се кретање произвољног елементарног делића дужине  $dz$  и масе  $dm$  (сл.7.4).



Слика 7.4

Овако издвојен делић изложен је деловању сила  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  које представљају резултанте унутрашњих сила у тачкама одговарајућих пресека. Услед неравнотеже тих сила елементарни делић има убрзање  $\vec{a} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \vec{k}$  у правцу  $Oz$  осе, тако да је, према другом Њутновом аксиому:

$$\vec{a} dm = \vec{F}' + \vec{F}. \quad (7.2.3)$$

Пројектовањем ове једначине на правац кретања добија се:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dm = d_z F \quad (d_z F = F' - F), \quad (7.2.4)$$

где  $d_z F$  означава прираштај силе који одговара прираштају координате  $z$ , тако да су, уз наведене особине разматраног модела:

$$dm = \rho A dz, \quad d_z F = \frac{\partial F}{\partial z} dz = A \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = AE \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} dz = AE \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz, \quad (7.2.5)$$

где су:  $\rho$  – густина,  $A$  – површина попречног пресека. Када се ови изрази уврсте у једначину (7.2.4) добија се линеарна парцијална диференцијална једначина другог реда:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (7.2.6)$$

где је  $c$  – брзина простирања таласа. Ова једначина представља диференцијалну једначину уздужних осцилација еластичног призматичног тела. Линеарност ове једначине је последица наведених особина идеализованог модела.

Диференцијална једначина (7.2.6) има исти облик као и једначина (7.1.3) осцилација затегнуте жице, па је и поступак за њено решавање исти. Наиме, као и у претходном случају, партикуларно решење се претпоставља у облику

$$w = Z(z)T(t), \quad (7.2.7)$$

тако да се, његовом заменом у једначину (7.2.6), добијају две обичне линеарне диференцијалне једначине:

$$Z'' + k^2 Z = 0, \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \left( \omega^2 = k^2 c^2 = k^2 \frac{E}{\rho} \right), \quad (7.2.8)$$

чија су општа решења:

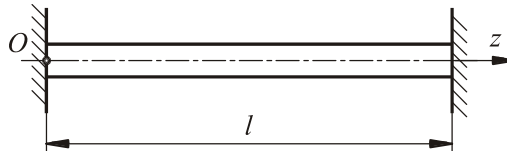
$$Z = C \cos(kz) + D \sin(kz), \quad T = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (7.2.9)$$



Свакој карактеристичној вредности  $k$  одговара по једно решење (7.2.9), односно по једно одговарајуће партикуларно решење (7.2.7).

У претходном случају (осцилације затегнуте жице) карактеристичне вредности су одређене на јединствен начин јер затегнута жица има јединствене контурне услове. Међутим, чврсто еластично тело чије уздужне осцилације разматрамо, може бити везано са другим телима на различите начине, услед чега се добијају и различите једначине за одређивање карактеристичних вредности. У даљем тексту су наведени неки примери контурних услова и одређивање одговарајућих карактеристичних вредности.

**1. Тело са непокретним крајевима.** На сл.7.5 су приказани основни модели таквих тела, где спољашње везе спречавају уздужна померања крајњих тачака.



Слика 7.5

У том случају услови су:

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad (7.2.10)$$

одакле, с обзиром на (7.2.7) и (7.2.9) следи:

$$Z(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad Z(l) = 0 \Rightarrow D \sin(kl) = 0. \quad (7.2.11)$$

Да би постојало нетривијално решење потребно је да је  $D \neq 0$ , тако да се на основу другог услова у (7.2.11) добија карактеристична једначина са одговарајућим карактеристичним решењима:

$$\sin(kl) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (7.2.13)$$

Може се уочити да, у овом случају постоји потпуна математичка аналогија са осцилацијама еластичне жице. Као и у претходном поступку, свакој карактеристичној вредности одговара по једно решење:

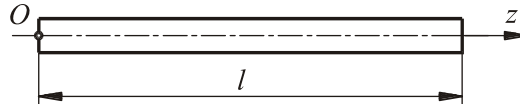
$$Z_n = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \quad T_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right), \quad (7.2.14)$$

на основу чега се добија опште решење:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A'_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \quad (7.2.15)$$

где су уведене нове константе:  $A'_n = A_n D_n$ ,  $B'_n = B_n D_n$ .

**2. Слободно тело.** У овом случају (сл.7.6) уздужна померања на крајевима тела нису ограничена спољашњим условима па се у том смислу и не могу поставити контурни услови.



Слика 7.6

Међутим, без обзира на померања крајњих тачака тела, у њима су напони, односно деформације као и аксијалне силе, једнаки нули, тј:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=l} = 0, \quad (7.2.16)$$

одакле, с обзиром на (7.2.7) и (7.2.9) следи:

$$Z'(0) = 0 \Rightarrow D = 0, \quad Z'(l) = 0 \Rightarrow C \sin(kl) = 0. \quad (7.2.17)$$

Због нетривијалности решења ( $C \neq 0$ ) одавде следи карактеристична једначина са одговарајућим карактеристичним вредностима:

$$\sin(kl) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (7.2.18)$$

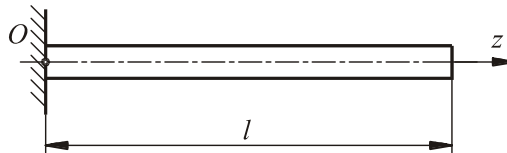
Свакој карактеристичној вредности одговара по једно решење (7.2.9):

$$Z_n = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \quad T_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right), \quad (7.2.19)$$

на основу чега се добија опште решење:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A'_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{l} z\right). \quad (7.2.20)$$

**3. Тело са једним непокретним и другим слободним крајем.** На сл.7.7 су приказани модели таквих тела.



Слика 7.7

Сагласно претходним разматрањима контурни услови су:

$$w(0, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=l} = 0, \quad (7.2.21)$$

односно:

$$Z(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad Z'(l) = 0 \Rightarrow D \cos(kl) = 0, \quad (7.2.22)$$

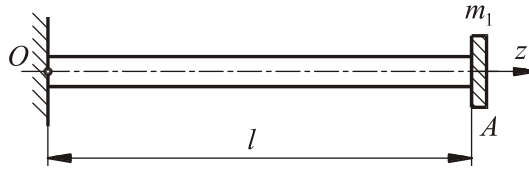
одакле је:

$$D \neq 0, \quad \cos(kl) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty), \quad (7.2.23)$$

тако да је опште решење:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A'_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} ct\right) + B'_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} ct\right) \right] \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} z\right). \quad (7.2.24)$$

**4. Тело са концентрисаном масом на слободном крају.** Ако је за слободни крај призматичног тела везано тело А масе  $m_1$  (сл.7.8) тада, према трећем Њутновом закону, она делују једно на друго силама једнаких интензитета а супротних смерова.



Слика 7.8

Убрзање тела А једнако је убрзању краја призматичног тела које, с обзиром на (7.2.7) и (7.2.8), може да се изрази у облику

$$a_A = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{z=l} = Z(l) \ddot{T}(t) = -\omega^2 Z(l) T(t), \quad (7.2.25)$$

па је, према другом Њутновом аксиому, сила која делује на тело А:

$$F = m_1 a_A = -m_1 \omega^2 Z(l) T(t). \quad (7.2.26)$$

Са друге стране, исто толика сила, али супротног смера, делује на крај призматичног тела, где се, услед тога, јављају одговарајући напони и одговарајуће деформације, тако да је:

$$A \sigma_z(l, t) = -F \Rightarrow AE \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=l} = -m_1 a_A \Rightarrow AE Z'(l) = m_1 \omega^2 Z(l). \quad (7.2.27)$$

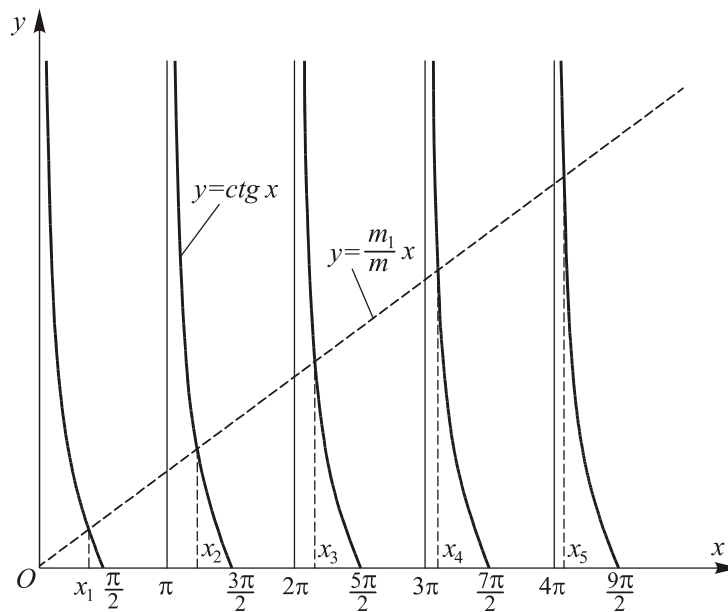
Леви крај је непокретан, па су, с обзиром на (7.2.9) и (7.2.27),

$$C = 0, \quad D \neq 0, \quad AE \cos(kl) = m_1 k c^2 \sin(kl), \quad (7.2.28)$$

одакле, пошто су:  $c^2 = E/\rho$ ,  $m = \rho Al$ , следи карактеристична једначина:

$$\operatorname{ctg}(kl) = \frac{m_1}{m} kl. \quad (7.2.29)$$

Решења ове трансцедентне једначине могу да се одреде пресецима криве  $y = \operatorname{ctg} x$  и праве  $y = (m_1/m)x$ . Нека су  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) апсцисе пресечних тачака, одговарајуће вредности  $k_n = x_n/l$  представљају тражене карактеристичне вредности.

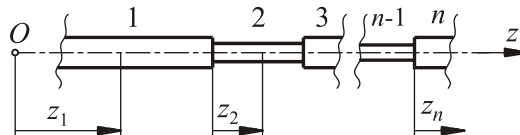


Слика 7.9

Са сл.7.9 може да се уочи да, за веће вредности природног броја  $n$  ( $n = 4, 5, \dots$ ), карактеристични бројеви добијају вредности:

$$k_n \approx \frac{(n-1)\pi}{l}. \quad (7.2.30)$$

**5. Сложено тело.** Нека је посматрано тело (сл.7.10) сложено од  $n$ , међусобно круто везаних, призматичних тела различитих димензија и, у општем случају, различитих еластичних особина.



Слика 7.10

Тада сваком од тих тела одговара по једна диференцијална једначина облика (7.2.6), што значи да је понашање сложеног тела описано системом парцијалних диференцијалних једначина

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial z_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.2.31)$$

где је за свако тело уведен посебни координатни систем, као што је приказано на сл.7.10 . Број граничних услова у овом случају износи  $2n$ , па је поред два гранична услова на крајевима тела ( $z_1 = 0, z_n = l_n$ ), који зависе од спољашњих веза, потребно још  $2n - 2$  услова. Ови услови представљају чињеницу да су померања додирних пресека два тела међусобно једнака и да су одговарајуће силе у њима такође међусобно једнаке, тј:

$$w_i(l_i, t) = w_{i+1}(0, t), \quad F_i(l_i, t) = F_{i+1}(0, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (7.2.32)$$

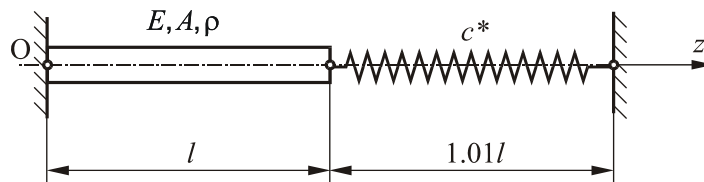
односно:

$$Z_i(l_i) = Z_{i+1}(0), \quad E_i A_i Z'_i(l_i) = E_{i+1} A_{i+1} Z'_{i+1}(0), \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (7.2.33)$$

при чему је, при формирању карактеристичне једначине, на сваком месту споја, из услова једнакости кружних фреквенција, потребно успоставити везу између одговарајућих карактеристичних вредности:

$$c_i k_i = c_{i+1} k_{i+1}. \quad (7.2.34)$$

**Пример 7.2.1:** Одредити коначну једначину лонгитудиналних осцилација штапа које настају из стања мировања уклањањем опруге крутости  $c^*$  и дужине  $l$  у ненапрегнутом стању. Позната је површина попречног пресека штапа  $A$  као и карактеристике материјала штапа (густина  $\rho$  и модул еластичности  $E$ ).



Слика 7.11

**Решење:** Уклањањем опруге настају лонгитудиналне осцилације штапа током којих је леви крај штапа уклештен а десни слободан. На основу разматрања у одељку 7.2 , за случај једног везаног и једног слободног краја, опште решење има облик (7.2.24):

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cos(k_n ct) + B'_n \sin(k_n ct)] \sin(k_n z), \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}. \quad (1)$$

Пошто је штап мировао у почетном тренутку:

$$\Phi(z) = \dot{w}(z,0) = 0, \quad (2)$$

следи да је:

$$B'_n = 0. \quad (3)$$

Непосредно пре уклањања опруге, аксијална сила у сваком пресеку штапа једнака је сили у опрузи:

$$F_0 = c * \Delta l = c * \frac{l}{100}, \quad (4)$$

тако да је:

$$EA \frac{\partial w(z,0)}{\partial z} = c * \frac{l}{100}, \quad (5)$$

одакле следи:

$$w(z,0) = \frac{c * l}{100EA} z + w(0,0), \quad (6)$$

при чему је, из услова да је леви крај уклештен (непомичан):

$$w(0,0) = 0. \quad (7)$$

Почетни услов за померања је:

$$f(z) = w(z,0) = \frac{c * l}{100EA} z, \quad (8)$$

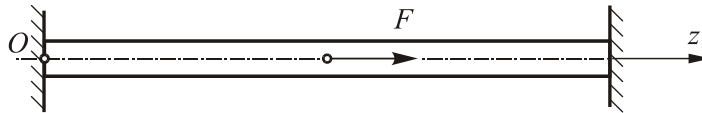
из кога се одређује:

$$A'_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{c * l}{100EA} z \sin k_n z dz = \frac{c * l}{50EAk_n^2} (\sin k_n l - k_n l \cos k_n l). \quad (9)$$

Узимајући у обзир карактеристичну једначину (7.2.23) коначна једначина лонгитудиналних осцилација гласи:

$$w(z,t) = \frac{c * l}{50EA} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sin k_n l \sin k_n z \cos(k_n ct). \quad (10)$$

**Пример 7.2.2:** Обострано уклештени призматични штап, масе  $m$ , дужине  $l$ , површине попречног пресека  $A$  и модула еластичности  $E$ , оптерећен је, на средини распона силом константног интензитета  $F$  и налази се у стању мировања. Одредити закон осциловања штапа које настаје након растерећења штапа. Сматрати да је штап пре почетка деловања силе  $F$  био ненапрегнут.



Слика 7.12

**Решење:** Опште решење дато је изразом (7.2.15):

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cos(k_n ct) + B'_n \sin(k_n ct)] \sin(k_n z), c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{EA l}{m}}, k_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (1)$$

Почетне брзине једнаке су нули па је и:

$$B'_n = 0. \quad (2)$$

На основу вредности аксијалне силе пре почетка осциловања:

$$F_a = \begin{cases} \frac{F}{2}, 0 \leq z < \frac{l}{2} \\ -\frac{F}{2}, \frac{l}{2} < z \leq l \end{cases} \quad (3)$$

као и релације:

$$EA \frac{\partial w(z,0)}{\partial z} = F_a, \quad (4)$$

и услова:

$$w(0,0) = w(l,0) = 0, \quad (5)$$

добија се непрекидна функција  $f(z)$  почетних померања:

$$f(z) = w(z,0) = \begin{cases} \frac{F}{2EA} z, 0 \leq z \leq \frac{l}{2} \\ \frac{F}{2EA} (l-z), \frac{l}{2} \leq z \leq l \end{cases} \quad (6)$$

чији је график приказан на сл. 7.12а, заједно са дијаграмом аксијалне силе. Константе  $A'_n$  одређујемо из израза:

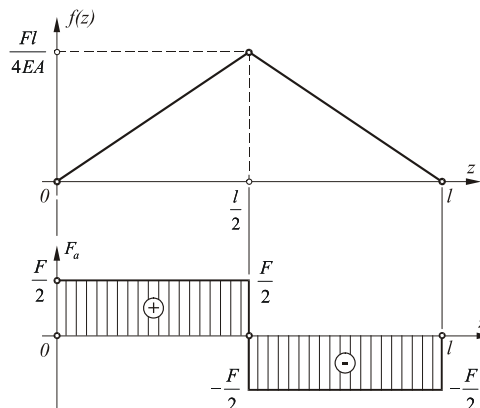
$$A'_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin k_n z dz = \frac{F}{EA l} \left[ \int_0^{l/2} z \sin k_n z dz + \int_{l/2}^l (l-z) \sin k_n z dz \right], \quad (7)$$

тако да је:

$$A'_n = \frac{2F}{EA l k_n^2} \sin \frac{k_n l}{2}. \quad (8)$$

Коначна једначина осциловања гласи:

$$w(z,t) = \frac{2F}{EA l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^2} \sin \frac{k_n l}{2} \sin(k_n z) \cos(ck_n t). \quad (9)$$



Слика 7.12а

Пошто је:

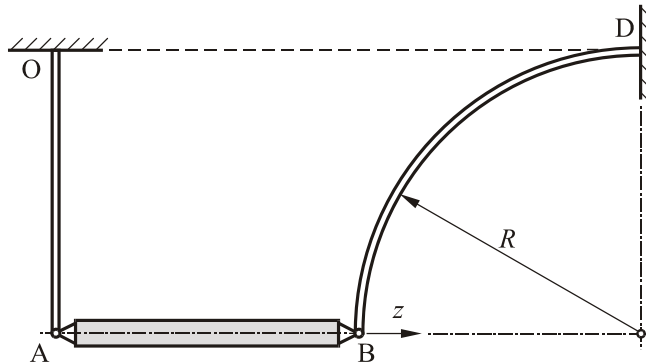
$$\sin \frac{k_n l}{2} = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{s-1}, n = 2s - 1 \\ 0, n = 2s \end{cases}, \quad (10)$$

коначна једначина осциловања (16) може се написати и у облику:

$$w(z, t) = \frac{2Fl}{EA\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)^2} \sin \frac{(2s-1)\pi z}{l} \cos \frac{(2s-1)\pi t}{l} \sqrt{\frac{EA I}{m}}. \quad (11)$$

**Пример 7.2.3:** Призматични штап  $AB$  масе  $m$ , дужине  $l$ , површине попречног пресека  $A$  и модула еластичности  $E$ , зглобно је везан за лаке штапове  $OA$  и  $BD$  чија је савојна крутост  $EI_x$ . Штап  $OA$  је прав, дужине  $R$ , а штап  $BD$  је савијен у облику четвртине кружнице полупречника  $R$ . Ако су у равнотежном положају сва тела ненапрегнута, написати карактеристичну једначину лонгитудиналних осцилација штапа  $AB$ .

**Решење:** Еквивалентни механички модел приказан је на сл. 7.13а. Еквивалентне крутости лакких штапова израчунавају се на основу њихових деформација у одговарајућим правцима (сл. 7.13б). Из отпорности материјала [7] познато је да је угиб испод силе на крају конзоле:

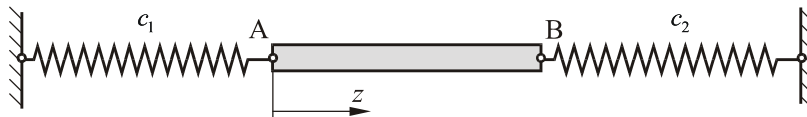


Слика 7.13

$$f_1 = \frac{F_1 R^3}{3EI_x}, \quad (1)$$

док се угиб  $f_2$  може израчунати на основу Кастиљанове (Alberto Castigliano, 1847-1888) теореме [13]:

$$f_2 = \frac{\partial A_d}{\partial F_2}, \quad (2)$$



Слика 7.13а



где је деформацијски рад при савијању:

$$A_d = \frac{1}{2EI_x} \int_0^{R\pi/2} M_f^2 ds. \quad (3)$$

Момент савијања у произвољном пресеку (сл. 7.13б) дат је изразом:

$$M_f = F_2 R \sin \varphi. \quad (4)$$

Заменом (4) и (3) у (2) добићемо:

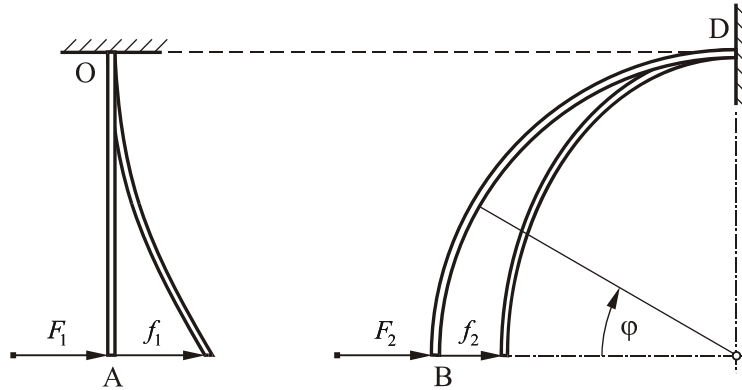
$$f_2 = \frac{\partial}{\partial F_2} \left[ \frac{1}{2EI_x} \int_0^{\pi/2} (F_2 R \sin \varphi)^2 R d\varphi \right] = \frac{F_2 R^3 \pi}{4EI_x}. \quad (5)$$

Еквиваленте крутости лакних штапова су, дакле:

$$c_1 = \frac{F_1}{f_1} = \frac{3EI_x}{R^3}, c_2 = \frac{F_2}{f_2} = \frac{4EI_x}{R^3 \pi}. \quad (6)$$

Карактеристична једначину се добија из контурних услова у тачкама  $A$  и  $B$ . На основу њих аксијалне силе на крајевима штапа  $AB$  морају бити једнаке одговарајућим силама у опругама:

$$EA \frac{\partial w(0,t)}{\partial z} = c_1 w(0,t), \quad EA \frac{\partial w(l,t)}{\partial z} = -c_2 w(l,t), \quad (7)$$



Слика 7.13б

односно:

$$EA Z'(0) = c_1 Z(0), \quad EA Z'(l) = -c_2 Z(l), \quad (8)$$

одакле следи систем једначина:

$$\begin{aligned} (c_1)C + (-EAk)D &= 0, \\ (-EAk \sin kl + c_2 \cos kl)C + (c_2 \sin kl + EAk \cos kl)D &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Хомогени систем линеарних једначина (10) имаће нетривијална решења уколико је:

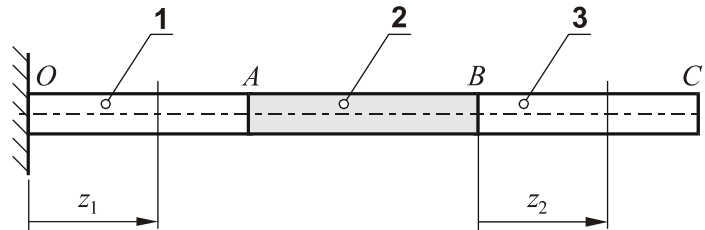
$$\begin{vmatrix} c_1 & -EAk \\ -EAk \sin kl + c_2 \cos kl & c_2 \sin kl + EAk \cos kl \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

одакле следи карактеристична једначина у облику:

$$\operatorname{tg} kl = \frac{l(c_1 + c_2)}{EA} \cdot \frac{(kl)}{(kl)^2 - \frac{l^2 c_1 c_2}{E^2 A^2}}, \quad (11)$$

где су константе  $c_1$  и  $c_2$  одређене изразима (6).

**Пример 7.2.4:** Три штапа једнаких маса  $m$ , дужина  $l$  и површина попречних пресека  $A$ , спојена су на начин приказан на сл. 7.14. Ако је штап 2 крут а модул еластичности штапова 1 и 3 износи  $E$ , написати карактеристичну једначину лонгитудиналних осцилација.



Слика 7.14

**Решење:** Штапови 1 и 3 врше лонгитудиналне осцилације, при чему су општа решења одговарајућих диференцијалних једначина:

$$w_1(z_1, t) = Z_1(z_1)T(t) = (C_1 \cos k_1 z_1 + D_1 \sin k_1 z_1)T(t), \quad (1)$$

$$w_2(z_2, t) = Z_2(z_2)T(t) = (C_2 \cos k_2 z_2 + D_2 \sin k_2 z_2)T(t),$$

где је:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (2)$$

Пошто су брзине простирања таласа у штаповима 1 и 3 једнаке:

$$c_1 = c_2 = c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{EA}{m}}, \quad (3)$$

тада су међусобно једнаки и  $k_1$  и  $k_2$ :

$$k_1 = k_2 = k = \frac{\omega}{c}. \quad (4)$$

У складу са контурним условима, померање тачке  $O$  једнако је нули:

$$w_1(0, t) = 0, \quad (5)$$

као и аксијална сила у тачки  $C$ :

$$w_2'(l, t) = 0, \quad (6)$$

док су померања тачака  $A$  и  $B$  међусобно једнака:

$$w_1(l, t) = w_2(0, t). \quad (7)$$

Осим тога, на основу закона о кретању средишта масе крутог штапа 2, који се креће транслаторно, следи да је:

$$m\ddot{w}_2(0,t) = EA w_2'(0,t) - EA w_1'(l,t), \quad (8)$$

где су на сл. 7.14а дате одговарајуће аксијалне силе које делују на штап 2.



Слика 7.14а

Заменом (1) и (2) у (5), (6), (7) и (8) добија се:

$$Z_1(0) = 0, Z_2'(l) = 0, \quad (9)$$

$$Z_1(l) = Z_2(0), -m(kc)^2 Z_2(0) = EAZ_2'(0) - EAZ_1'(l),$$

одакле следи хомогени систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ -C_2 k \sin kl + D_2 k \cos kl &= 0, \\ C_1 \cos kl + D_1 \sin kl &= C_2, \\ -mk^2 c^2 C_2 &= EAkD_2 - EA(-kC_1 \sin kl + kD_1 \cos kl), \end{aligned} \quad (10)$$

и карактеристична једначина:

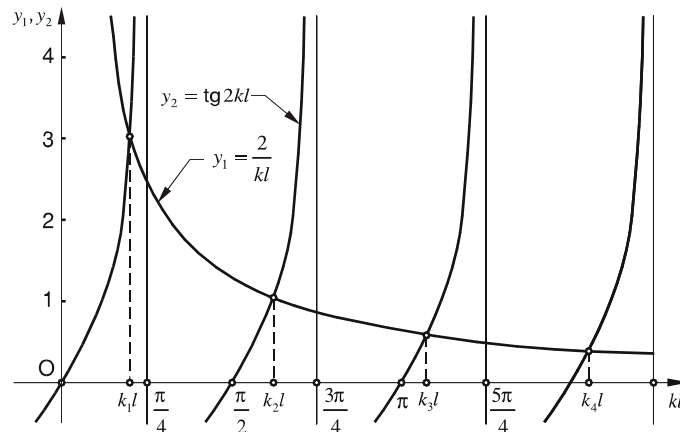
$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin kl & \cos kl \\ \sin kl & -1 & 0 \\ -EA \cos kl & mkc^2 & EA \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

која у развијеном облику гласи:

$$EA \sin^2 kl + \cos kl (mkc^2 \sin kl - EA \cos kl) = 0. \quad (12)$$

Једначина (12) се на основу (3) своди на израз:

$$\operatorname{tg} 2kl = \frac{2}{kl}. \quad (13)$$

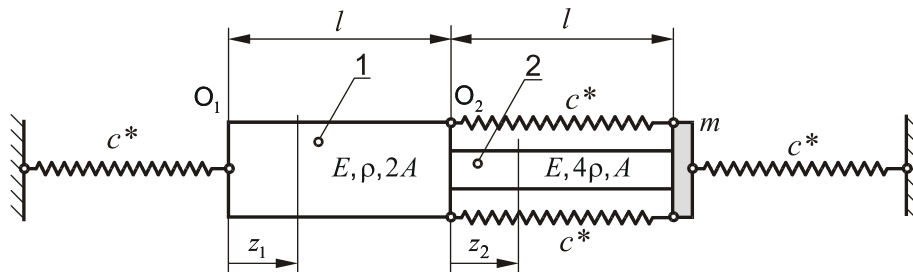


Слика 7.14б

Решења трансцедентне једначине (13) приказана су на сл. 7.14б и могу се приближно прочитати директно са графика. Применом неког од нумеричких метода ова решења се могу израчунати знатно прецизније:

$$k_1 l = 0.63230, k_2 l = 1.96758, k_3 l = 3.40701, k_4 l = 4.90594, \dots \quad (14)$$

**Пример 7.2.5:** Штап 1, густине  $\rho$  и површине попречног пресека  $2A$ , спојен је са штапом 2, густине  $4\rho$  и површине попречног пресека  $A$ , који на свом крају има причвршћен терет масе  $m$ . Штапови су једнаких дужина  $l$  и модула еластичности  $E$ . Опруге једнаких крутости  $c^*$  постављене су на начин приказан на сл. 7.15. Написати карактеристичну једначину лонгитудиналних осцилација, ако су у равнотежном положају све опруге ненапрегнуте.

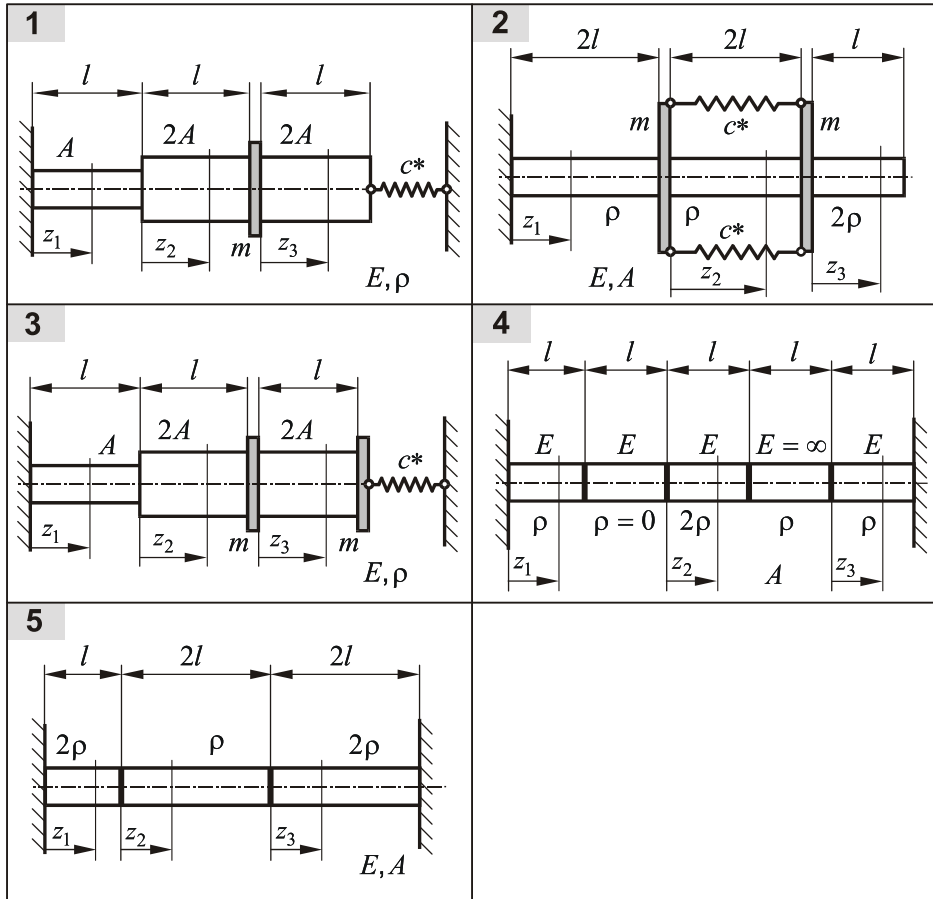


Слика 7.15

**Решење:** Карактеристична једначина:

$$\begin{vmatrix} -c^* & 2EAk & 0 & 0 \\ \cos kl & \sin kl & -1 & 0 \\ -2EAk \sin kl & 2EAk \cos kl & 2c^*(1 - \cos 2kl) & -EA(2k) - 2c^* \sin 2kl \\ 0 & 0 & (3c^* - mk^2 c_1^2) \cos 2kl - EA(2k) \sin 2kl - 2c^* & (3c^* - mk^2 c_1^2) \sin 2kl + EA(2k) \cos 2kl \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

**Пример 7.2.6** На сл.7.16 (1-5) приказани су равнотежни положаји система од три еластична тела која врше лонгитудиналне осцилације као и вредности одговарајућих величина Тела су ненапрегнута у равнотежном положају.. Написати контурне услове.



Слика 7.16

**Решења:****1. задатак**

$$k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad \omega = k\sqrt{E/\rho}, \quad [1] w_1(0, t) = 0, \quad [2] w_1(l, t) = w_2(0, t),$$

$$[3] EA w_1'(l, t) = E \cdot 2A w_2'(0, t), \quad [4] w_2(l, t) = w_3(0, t),$$

$$[5] m \ddot{w}_3(0, t) = E \cdot 2A w_3'(0, t) - E \cdot 2A w_2'(l, t), \quad [6] E \cdot 2A w_3'(l, t) = -c^* w_3(l, t).$$

**2. задатак**

$$k_1 = k_2 = k, \quad k_3 = k\sqrt{2}, \quad \omega = k\sqrt{E/\rho}, \quad [1] w_1(0, t) = 0, \quad [2] w_1(2l, t) = w_2(0, t),$$

$$[3] m \ddot{w}_2(0, t) = EA w_2'(0, t) - EA w_1'(2l, t) + 2c^* (w_3(0, t) - w_2(0, t)), \quad [4] w_2(2l, t) = w_3(0, t)$$

$$[5] m \ddot{w}_3(0, t) = EA w_3'(0, t) - EA w_2'(2l, t) - 2c^* (w_3(0, t) - w_2(0, t)), \quad [6] EA w_3'(l, t) = 0.$$

**3. задатак**

$$\begin{aligned}
k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad \omega = k\sqrt{E/\rho}, \quad [1] w_1(0, t) = 0, \quad [2] w_1(l, t) = w_2(0, t), \\
[3] EA w_1'(l, t) = E \cdot 2A w_2'(0, t), \quad [4] w_2(l, t) = w_3(0, t), \\
[5] m \ddot{w}_3(0, t) = E \cdot 2A w_3'(0, t) - E \cdot 2A w_2'(l, t), \\
[6] m \ddot{w}_3(l, t) = -c^* w_3(l, t) - E \cdot 2A w_3'(l, t).
\end{aligned}$$

**4. задатак**

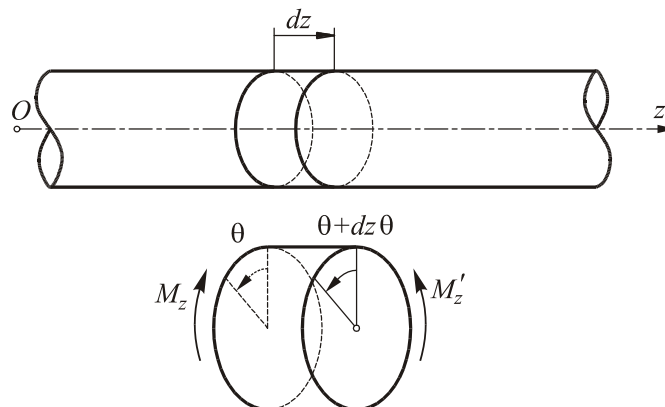
$$\begin{aligned}
k_1 = k_3 = k, \quad k_2 = k\sqrt{2}, \quad \omega = k\sqrt{E/\rho}, \quad c^* = EA/l, \quad m = \rho Al, \quad [1] w_1(0, t) = 0, \\
[2] EA w_1'(l, t) = c^* (w_2(0, t) - w_1(l, t)), \quad [3] EA w_2'(0, t) = c^* (w_2(0, t) - w_1(l, t)), \\
[4] w_2(l, t) = w_3(0, t), \quad [5] m \ddot{w}_3(0, t) = EA w_3'(0, t) - EA w_2'(l, t), \quad [6] w_3(l, t) = 0.
\end{aligned}$$

**5. задатак**

$$\begin{aligned}
k_1 = k_3 = k, \quad k_2 = k/\sqrt{2}, \quad \omega = k\sqrt{E/(2\rho)}, \quad [1] w_1(0, t) = 0, \quad [2] w_1(l, t) = w_2(0, t), \\
[3] EA w_1'(l, t) = EA w_2'(0, t), \quad [4] w_2(2l, t) = w_3(0, t), \quad [5] EA w_2'(2l, t) = EA w_3'(0, t), \\
[6] w_3(2l, t) = 0.
\end{aligned}$$

### 7.3 Увојне (торзионе) осцилације вратила кружног пресека

При обртању вратила, као пратећа појава, често се јавља увијање (торзија) вратила које се манифестује као обртања попречних пресека око уздужне осе вратила у односу на њихов положај у недеформисаном стању вратила. Према томе, ако са  $\theta$  (сл.7.17) означимо угао оваквог обртања (угао увијања, угао торзије), функција  $\theta = \theta(z, t)$  у потпуности одређује понашање вратила у овом случају.



Слика 7.17

Смичући напони  $\tau$  у тачкама пресека су такви да се одговарајуће силе у равни пресека своде на спрег чији се момент назива *момент увијања* (*торзије*) и има вредност:

$$M_z = GI_o \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (7.3.1)$$

где су:  $G$  – модул клизања,  $I_o$  – поларни момент инерције попречног пресека у односу на његов центар. Ако се за разматрање издвоји произвољни делић вратила елементарне дужине  $dz$  (сл.7.17), може да се установи да је он изложен деловању момената  $M_z$  и  $M'_z$ . Услед тога диференцијална једначина обртања елементарног делића је

$$dJ_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = M'_z - M_z, \quad (7.3.2)$$

где је  $dJ_z$  – момент инерције елементарног делића у односу на  $Oz$  осу. Како су:

$$dJ_z = \rho I_o dz, \quad M'_z - M_z = d_z M_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} dz = GI_o \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz, \quad (7.3.3)$$

где је  $\rho$  – густина материјала, једначина (7.3.2) добија облик:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad \left( c^2 = \frac{G}{\rho} \right). \quad (7.3.4)$$

Ова једначина има исти облик као и једначине (7.1.3) осцилација затегнуте жице и (7.2.6) уздужних осцилација призматичног тела, па је и поступак за решавање исти, тј. партикуларно решење претпоставља се у облику:

$$\theta = Z(z)T(t) \quad (7.3.5)$$

услед чега се парцијална једначина (7.3.4) раздваја на две обичне једначине:

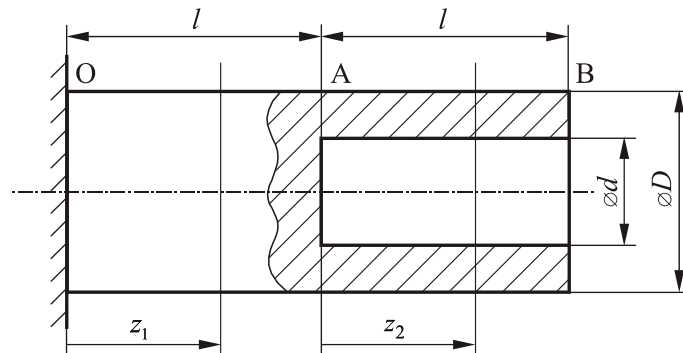
$$Z'' + k^2 Z = 0, \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (\omega = kc), \quad (7.3.6)$$

чија су решења:

$$Z = C \cos(kz) + D \sin(kz), \quad T = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (7.3.7)$$

Облик ових решења зависи од контурних (граничних) и почетних услова, аналогно разматрањима одељка 7.2.

**Пример 7.3.1:** Унутар ваљка дужине  $2l$  и пречника  $D$  избушена је рупа пречника  $d$  и дубине  $l$ . Густина ваљка износи  $\rho$  а модул клизања  $G$ . Написати карактеристичну једначину торзионих осцилација.



Слика 7.18

**Решење:** Из диференцијалних једначина торзионих осцилација у деловима константних попречних пресека:

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z_i^2}, \quad (i=1,2), \quad (1)$$

претпостављањем решења у облику:

$$\theta_i(z_i, t) = Z_i(z_i) T(t), \quad (i=1,2), \quad (2)$$

добива се:

$$Z_i(z_i) = C_i \cos k_i z_i + D_i \sin k_i z_i, \quad (i=1,2) \quad (3)$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Брзина простирања таласа:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4)$$

иста је у оба пресека тако да је:

$$k_1 = k_2 = k. \quad (5)$$

Из контурних услова следи да је угао на месту  $O$  једнак нули:

$$\theta_1(0, t) = 0, \quad (6)$$

као и момент увијања у пресеку  $B$  (на слободном крају):

$$GI_{O_2} \theta_2'(l, t) = 0, \quad (7)$$

док су у пресеку  $A$  међусобно једнаки углови:

$$\theta_1(l, t) = \theta_2(0, t), \quad (8)$$

и моменти увијања:

$$GI_{O_1} \theta_1'(l, t) = GI_{O_2} \theta_2'(0, t), \quad (9)$$



где је:

$$I_{O1} = \frac{D^4 \pi}{32}, I_{O2} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}. \quad (10)$$

На основу контурних услова имамо следећи хомогени систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ -kC_2 \sin kl + kD_2 \cos kl &= 0, \\ C_1 \cos kl + D_1 \sin kl &= C_2, \\ G \frac{D^4 \pi}{32} (-kC_1 \sin kl + kD_1 \cos kl) &= G \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} kD_2, \end{aligned} \quad (11)$$

који има нетривијална решења само ако је:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin kl & \cos kl \\ \sin kl & -1 & 0 \\ D^4 \cos kl & 0 & -(D^4 - d^4) \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

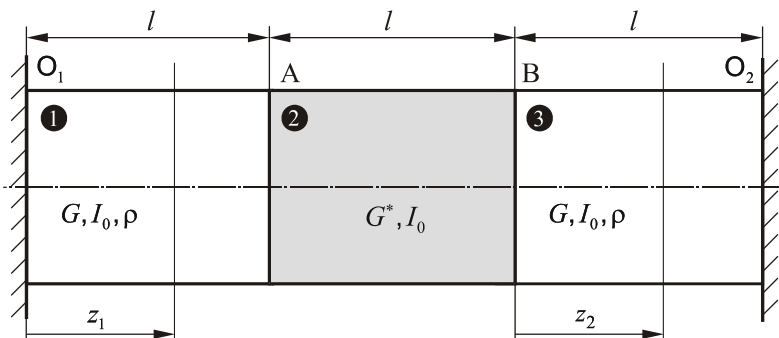
тако да карактеристична једначина у развијеном облику гласи:

$$\operatorname{tg}^2 kl = \frac{D^4}{D^4 - d^4}. \quad (13)$$

**Пример 7.3.2:** Ваљак дужине  $3l$  и поларног момента инерције површине попречног пресека  $I_0$  обострано је уклештен. Делови 1 и 3 направљени су од материјала густине  $\rho$  и модула клизања  $G$ , а између њих уметнути део 2 израђен је од материјала занемарљиве густине и модула клизања  $G^*$ . Ако је у равнотежном положају ваљак ненапрегнут, написати карактеристичну једначину торзионих осцилација.

**Решење:** Средњи део ваљка је лак, али има еластична својства, тако да се може сматрати опругом крутости:

$$c^* = \frac{G^* I_0}{l}. \quad (1)$$



Слика 7.19

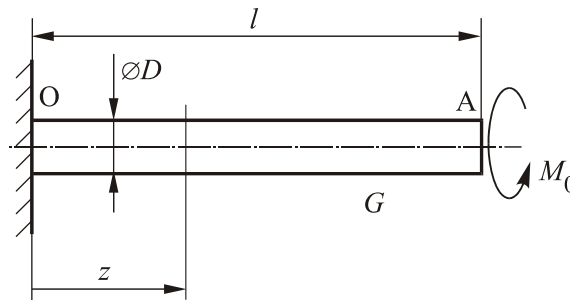
Из контурних услова следи:

$$\begin{aligned} C_2 \cos kl + D_2 \sin kl &= 0, \\ G l k \cos kl \cdot D_1 &= G^* (C_2 - D_1 \sin kl), \\ G l k D_2 &= G^* (C_2 - D_1 \sin kl), \end{aligned} \quad (2)$$

одакле је карактеристична једначина:

$$(G l k \cos kl + 2G^* \sin kl) \cos kl = 0. \quad (3)$$

**Пример 7.3.3:** Хомогени ваљак масе  $m$ , дужине  $l$ , пречника  $D$  и модула клизања  $G$  је на свом левом крају уклештен док је десни крај ваљка слободан. Ако у једном тренутку на слободан крај ваљка почне деловати константан спрег сила момента  $M_0$ , одредити коначну једначину торзионих осцилација ваљка. Сматрати да је у тренутку почетка дејства спрега ваљак мировао у ненапрегнутом стању.



Слика 7.20

**Решење:** Диференцијална једначина торзионих осцилација гласи:

$$\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2}. \quad (1)$$

где је брзина простирања таласа:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{GD^2 \pi}{4m}}. \quad (2)$$

У складу са контурним условима, угао на месту  $O$  једнак је нули:

$$\theta(0,t) = 0, \quad (3)$$

док је момент увијања у пресеку  $A$  за све време осциловања једнак константном моменту  $M_0$ :

$$G I_0 \theta'(l,t) = M_0, \quad (4)$$

где је поларни момент инерције површине попречног пресека:

$$I_0 = \frac{D^4 \pi}{32}. \quad (5)$$

Увођењем смене:

$$\theta(z, t) = \varphi(z, t) + \frac{M_0}{GI_0} z, \quad (6)$$

диференцијална једначина (1) задржава исти облик:

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2}, \quad (7)$$

док се контурни услови (3) и (4) свде на:

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= 0, \\ \varphi'(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Новоуведени угао  $\varphi = \varphi(z, t)$  представља углове увијања пресека у односу на равнотежни положај ваљка под дејством задатог спрега сила.

Почетни услови осциловања гласе:

$$\begin{aligned} f(z) = \varphi(z, 0) &= \theta(z, 0) - \frac{M_0}{GI_0} z = -\frac{M_0}{GI_0} z, \\ \Phi(z) = \dot{\varphi}(z, 0) &= \dot{\theta}(z, 0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решавајући диференцијалну једначину (7) са контурним условима (8) и почетним условима (9) добијају се карактеристичне вредности:

$$k_n = \frac{2n-1}{2l} \pi, n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

и коначна једначина:

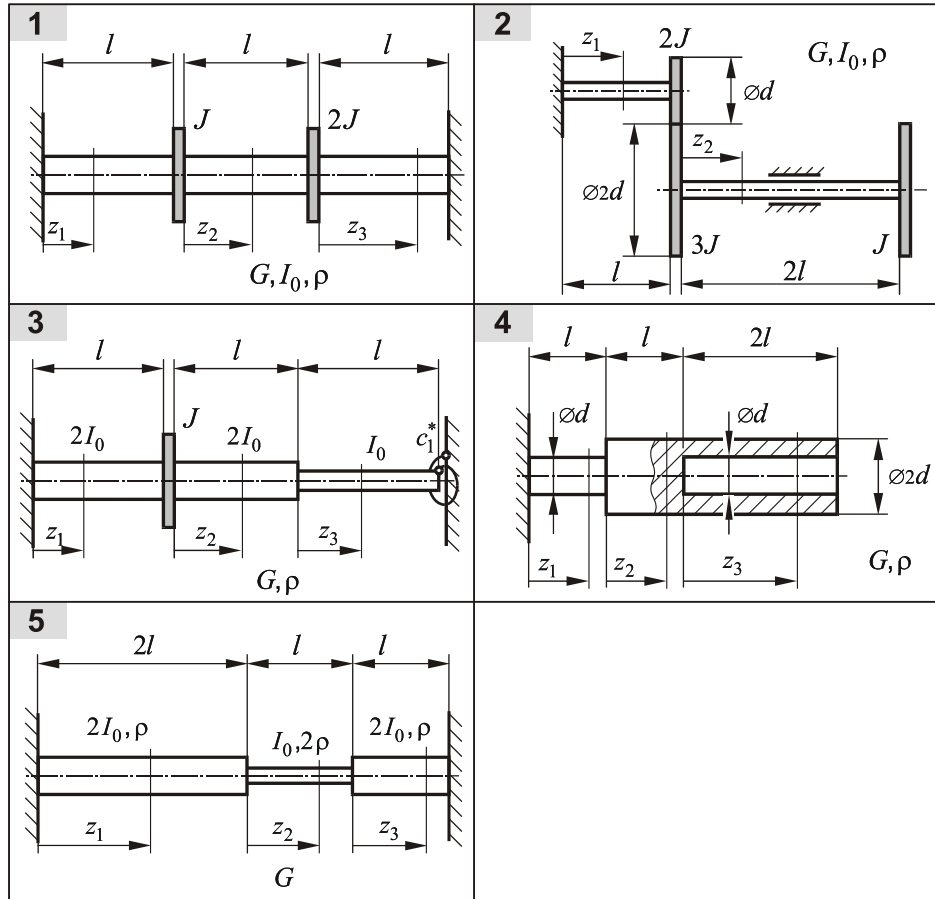
$$\varphi(z, t) = -\frac{2M_0}{GI_0 l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n l}{k_n^2} \sin k_n z \cos ck_n t. \quad (11)$$

Заменом (11) у (6) добија се тражено решење:

$$\theta(z, t) = \frac{M_0}{GI_0} \left( z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_n l}{lk_n^2} \sin k_n z \cos ck_n t \right), \quad (18)$$

где су  $c$ ,  $I_0$  и  $k_n$  одређени изразима (2), (5) и (10).

**Пример 7.3.4** На сл.7.21 (1-5) приказани су равнотежни положаји система еластичних тела која врше торзионе осцилације као и вредности одговарајућих величина. Тела су ненапрегнута у равнотежном положају. Написати контурне услове.



Слика 7.21

**Решења:**

**1. задатак**

$$k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad \omega = k\sqrt{G/\rho}, \quad [1] \theta_1(0, t) = 0, \quad [2] \theta_1(l, t) = \theta_2(0, t),$$

$$[3] J\ddot{\theta}_2(0, t) = GI_0\theta_2'(0, t) - GI_0\theta_1'(l, t), \quad [4] \theta_2(l, t) = \theta_3(0, t),$$

$$[5] 2J\ddot{\theta}_3(0, t) = GI_0\theta_3'(0, t) - GI_0\theta_2'(l, t), \quad [6] \theta_3(l, t) = 0.$$

**2. задатак**

$$k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k\sqrt{G/\rho}, \quad [1] \theta_1(0, t) = 0, \quad [2] \theta_1(l, t) = -2\theta_2(0, t),$$

$$[3] 3J\ddot{\theta}_2(0, t) - 4J\ddot{\theta}_1(l, t) = GI_0\theta_2'(0, t) + 2GI_0\theta_1'(l, t),$$

$$[4] J\ddot{\theta}_2(2l, t) = -GI_0\theta_2'(2l, t).$$

**3. задатак**

$$k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad \omega = k\sqrt{G/\rho}, \quad [1] \theta_1(0, t) = 0, \quad [2] \theta_1(l, t) = \theta_2(0, t),$$

$$[3] J\ddot{\theta}_2(0, t) = 2GI_0\theta_2'(0, t) - 2GI_0\theta_1'(l, t), \quad [4] \theta_2(l, t) = \theta_3(0, t),$$

$$[5] 2GI_0\theta_2'(l, t) = GI_0\theta_3'(0, t), \quad [6] GI_0\theta_3'(l, t) = -c_1^*\theta_3(l, t).$$

**4. задатак**

$$k_1 = k_2 = k_3 = k, \quad \omega = k\sqrt{G/\rho}, \quad I_{02} = 16I_{01}, \quad I_{03} = 15I_{01}, \quad [1] \theta_1(0, t) = 0,$$

$$[2] \theta_1(l, t) = \theta_2(0, t), \quad [3] GI_{01}\theta_1'(l, t) = GI_{02}\theta_2'(0, t), \quad [4] \theta_2(l, t) = \theta_3(0, t),$$

$$[5] GI_{02}\theta_2'(l, t) = GI_{03}\theta_3'(0, t), \quad [6] GI_{03}\theta_3'(2l, t) = 0.$$

**5. задатак**

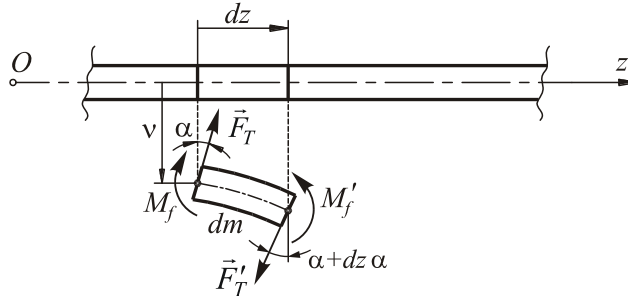
$$k_1 = k_3 = k, \quad k_2 = k\sqrt{2}, \quad \omega = k\sqrt{G/\rho}, \quad [1] \theta_1(0, t) = 0, \quad [2] \theta_1(2l, t) = \theta_2(0, t),$$

$$[3] 2GI_0\theta_1'(2l, t) = GI_0\theta_2'(0, t), \quad [4] \theta_2(l, t) = \theta_3(0, t),$$

$$[5] GI_0\theta_2'(l, t) = 2GI_0\theta_3'(0, t), \quad [6] \theta_3(l, t) = 0.$$

**7.4 Попречне осцилације призматичних тела**

Нека је координатни систем постављен тако да раван  $yOz$  представља раван савијања призматичног тела (сл.7.22), при чему је оса  $Oz$  у правцу уздужне осе тела у недеформисаном стању.



Слика 7.22

Разматраће се савијање тела чији модел представља следећу идеализацију:

- померања  $v$  средишта попречних пресека управна су на осу  $Oz$  и мала у односу на дужину  $l$  тела,
- попречни пресеци остају равни и управни на еластичну линију деформисаног тела,

в) деформације и одговарајући напони у тачкама тела не прелазе границу области за коју важи линеарни Хуков закон.

Уз наведену идеализацију, за понашање еластичног тела, довољно је разматрати произвољни елементарни дељић тела дужине  $dz$  и масе:

$$dm = \rho dV = \rho A dz, \quad (7.4.1)$$

где су:  $\rho$  – густина тела,  $A$  – површина попречног пресека. На овако издвојени дељић делују трансверзалне силе  $\vec{F}_T$  и  $\vec{F}'_T$  и моменти савијања  $\vec{M}_f$  и  $\vec{M}'_f$  (сл.7.22), при чему, с обзиром на усвојени координатни систем, важе следеће релације:

$$F_T = \frac{\partial M_f}{\partial z}, \quad M_f = -EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (7.4.2)$$

где су:  $E$  – модул еластичности,  $I_x$  – момент инерције попречног пресека у односу на његову централну осу паралелну оси  $Ox$ .

Кретање дељића у правцу осе  $Oy$  описано је једначином

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dm = Y' - Y, \quad (7.4.3)$$

где је  $Y' - Y = F'_T \cos(\alpha + d\alpha) - F_T \cos \alpha$ . За мале углове  $\alpha$  је  $\cos \alpha \approx \cos(\alpha + d\alpha) \approx 1$ , тако да је, с обзиром на (7.4.2),

$$Y' - Y = F'_T - F_T = d_z F_T = \frac{\partial F_T}{\partial z} dz = -EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} dz. \quad (7.4.4)$$

Увршћивањем (7.4.1) и (7.4.4) у једначину (7.4.3) добија се диференцијална једначина попречних осцилација призматичног тела:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0 \quad \left( c^2 = \frac{EI_x}{\rho A} \right). \quad (7.4.5)$$

Иако је ова парцијална једначина четвртог реда, у чему се разликује од претходно разматраних једначина, поступак њеног решавања, односно одређивања функције:

$$v = v(z, t), \quad (7.4.6)$$

се такође заснива на раздвајању променљивих, тј. на претпостављању партикуларног решења у облику:

$$v = Z(z)T(t), \quad (7.4.7)$$

тако да су:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = Z(z)\ddot{T}(t), \quad \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = Z^{IV}(z)T(t).$$

Заменом ових извода у једначину (7.4.5), после раздвајања променљивих, добија се:

$$\frac{Z^{IV}}{Z} = -\frac{\ddot{T}}{c^2 T} = h,$$

где је, због природе разматраног система, константа  $h$  позитивна, тако да се може узети да је  $h = k^4$ . Према томе, једначина (7.4.5) своди се на еквивалентан систем две обичне једначине:

$$\begin{aligned} Z^{IV} - k^4 Z &= 0, \\ \ddot{T} + \omega^2 T &= 0 \quad (\omega = k^2 c). \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

Када се партикуларно решење прве једначине претпостави у облику

$Z = ae^{\lambda z}$ , добија се једначина:

$$\lambda^4 - k^4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + k^2 = 0, \quad \lambda^2 - k^2 = 0$$

са решењима:

$$\lambda_{1,2} = \pm ik, \quad \lambda_{3,4} = \pm k. \quad (7.4.9)$$

Према томе, опште решење прве једначине у (7.4.8) састоји се из хармонијског и хиперболичког дела, тј. :

$$Z = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + C_3 \cosh(kz) + C_4 \sinh(kz), \quad (7.4.10)$$

а решење друге једначине има облик:

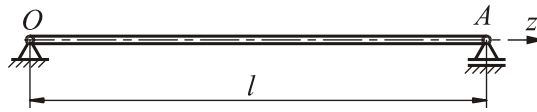
$$T = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (\omega = k^2 c). \quad (7.4.11)$$

Константе у овим решењима као и карактеристичне вредности  $k$  одређују се на основу граничних и почетних услова. Пошто је диференцијална једначина (7.4.5) четвртог реда по независно променљивој  $z$ , за једно тело константног пресека толико и има контурних услова.

### 1. Попречне осцилације просте греде

Проста греда (сл.7.23) ослоњена је или зглобно везана на својим крајевима тако да су гранични услови:

$$\begin{aligned}
v(0,t) = 0 &\Rightarrow Z(0) = 0, \\
M_f(0,t) = 0 &\Rightarrow \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{z=0} = 0 \Rightarrow Z''(0,t) = 0, \\
v(l,t) = 0 &\Rightarrow Z(l,t) = 0, \\
M_f(l,t) = 0 &\Rightarrow \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{z=l} = 0 \Rightarrow Z''(l,t) = 0.
\end{aligned} \tag{7.4.12}$$



Слика 7.23

На основу ових услова, с обзиром на (7.4.10), добија се систем једначина:

$$\begin{aligned}
C_1 + C_3 &= 0 \\
-C_1 + C_3 &= 0 \\
C_1 \cos(kl) + C_2 \sin(kl) + C_3 \cosh(kl) + C_4 \sinh(kl) &= 0 \\
-C_1 \cos(kl) - C_2 \sin(kl) + C_3 \cosh(kl) + C_4 \sinh(kl) &= 0,
\end{aligned} \tag{7.4.13}$$

одакле следи:

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad \sin(kl) = 0, \tag{7.4.14}$$

тако да су карактеристичне вредности и одговарајуће фреквенције:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 c \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \tag{7.4.15}$$

На основу овако одређених константи и карактеристичних вредности одговарајућа решења (7.4.10) и (7.4.11) су:

$$Z_n = C_{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \quad T_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right), \tag{7.4.16}$$

а одговарајућа партикуларна решења (7.4.7):

$$v_n = \left[ A'_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \tag{7.4.17}$$

где су уведене нове константе:

$$A'_n = A_n C_{2n}, \quad B'_n = B_n C_{2n}. \tag{7.4.18}$$



Према томе, опште решење има облик:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A'_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) + B'_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} ct\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), \quad (7.4.19)$$

односно:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} ct - \alpha_n\right), \quad (7.4.20)$$

где су:

$$R_n = \sqrt{A_n'^2 + B_n'^2}, \quad \alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{B_n'}{A_n'}. \quad (7.4.21)$$

На основу почетних услова:

$$v(z, 0) = f(z), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \Phi(z), \quad (7.4.22)$$

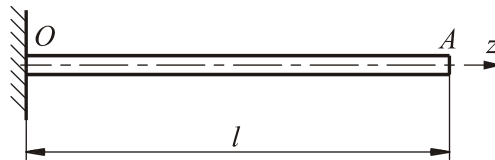
као и у претходним случајевима, добијају се константе:

$$A'_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \cos\left(\frac{n\pi}{l} z\right) dz, \quad B'_n = \frac{2}{n\pi c_0} \int_0^l \Phi(z) \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) dz. \quad (7.4.23)$$

## 2. Попречне осцилације конзоле

Ако се у уклештени крај конзоле дужине  $l$  постави координатни почетак (сл.7.24), контурни услови су:

$$\begin{aligned} v(0, t) = 0 &\Rightarrow Z(0) = 0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 &\Rightarrow Z'(0) = 0, \\ M_f(l, t) = 0 &\Rightarrow Z''(l) = 0, \\ F_T(l, t) = 0 &\Rightarrow Z'''(l) = 0. \end{aligned} \quad (7.4.24)$$



Слика 7.24

Коришћењем ових услова, с обзиром на (7.4.10), добијају се једначине:

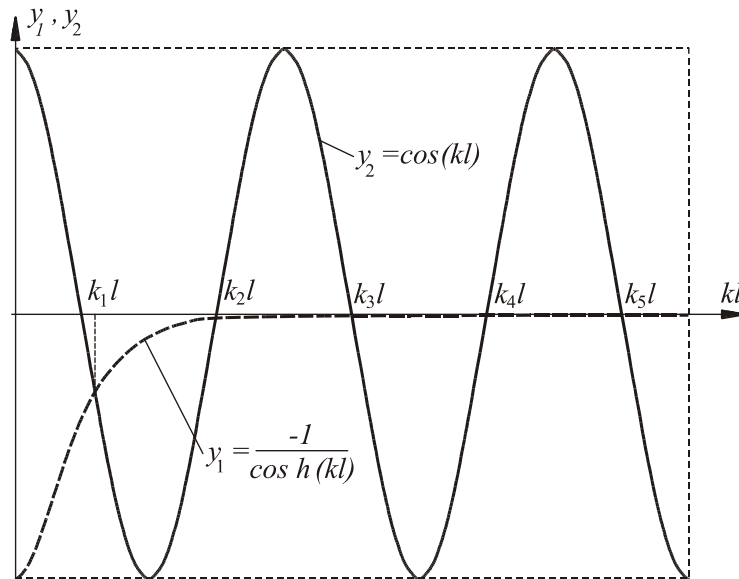
$$\begin{aligned}
 A + C &= 0 \\
 B + D &= 0 \\
 -A \cos(kl) - B \sin(kl) + C \cosh(kl) + D \sinh(kl) &= 0 \\
 A \sin(kl) - B \cos(kl) + C \sinh(kl) + D \cosh(kl) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.4.25}$$

Да би овај систем једначина имао нетривијална решења, довољно је да је детерминанта система једнака нули, тј.:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 -\cos(kl) & -\sin(kl) & \cosh(kl) & \sinh(kl) \\
 \sin(kl) & -\cos(kl) & \sinh(kl) & \cosh(kl)
 \end{vmatrix} = 0, \tag{7.4.26}$$

одакле се добија трансцедентна карактеристична једначина:

$$\cosh kl \cos kl = -1 \tag{7.4.27}$$

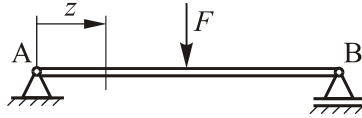


Слика 7.24а

из које се, применом нумеричких метода, могу израчунати карактеристичне вредности. На сл.7.24а приказана су решења добијена апсцисама пресека одговарајућих функција.

**Пример 7.4.1:** Проста греда  $AB$  модула еластичности  $E$ , дужине  $l$ , масе  $m$ , момента инерције површине попречног пресека  $I_x$  и површине попречног пресека  $A$ , оптерећена је на средини распона силом константног интензитета  $F$ . Одредити

коначну једначину попречних осцилација које настају из стања мировања након престанка дејства силе  $F$ . Упоредити добијене вредности кружних фреквенција и сопствених облика осциловања са резултатима редукованог модела са три степена слободe (пример 3.10.8).



Слика 7.25

**Решење:** Пошто је греда мировала у почетном тренутку:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} = \Phi(z) = 0 \Rightarrow B'_n = 0, \quad (1)$$

док функција:

$$v(z,0) = f(z), \quad (2)$$

представља једначину еластичне линије греде под дејством силе на средини распона. Полазећи од диференцијалне једначине еластичне линије:

$$M_f = -EI_x f''(z), \quad (3)$$

где је:

$$M_f = \begin{cases} \frac{F}{2}z, & 0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{F}{2}z - F(z - \frac{l}{2}), & \frac{l}{2} \leq z \leq l, \end{cases} \quad (4)$$

и од контурних услова:

$$f(0) = 0, f(l) = 0, \quad (5)$$

добићемо:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{F}{EI_x} \left(-\frac{z^3}{12} + \frac{3zl^2}{48}\right), & 0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{F}{EI_x} \left[-\frac{z^3}{12} + \frac{3zl^2}{48} + \frac{1}{6}\left(z - \frac{l}{2}\right)^3\right], & \frac{l}{2} \leq z \leq l. \end{cases} \quad (6)$$

Интеграл (7.4.23) сада се своди на:

$$A'_n = \frac{2F}{EI_x} \left[ \int_0^{l/2} \left(\frac{zl^2}{16} - \frac{z^3}{12}\right) \sin k_n z dz + \int_{l/2}^l \left[\frac{zl^2}{16} - \frac{z^3}{12} + \frac{1}{6}\left(z - \frac{l}{2}\right)^3\right] \sin k_n z dz \right], \quad (7)$$

тако да је:

$$A'_n = \frac{2F}{EI_x k_n^4} \sin \frac{k_n l}{2} = \frac{2Fl^3}{n^4 \pi^4 EI_x} \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (8)$$

Конечна једначина трансверзалних осцилација греде у овом примеру је:

$$v(z,t) = \frac{2Fl^3}{\pi^4 EI_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi z}{l} \cos \left( \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x l}{m}} t \right), \quad (9)$$

или, након упрошћавања:

$$v(z,t) = \frac{2Fl^3}{\pi^4 EI_x} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)^4} \sin \frac{(2p-1)\pi z}{l} \cos \left[ \frac{(2p-1)^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x l}{m}} t \right]. \quad (10)$$

Кружне фреквенције редукованог модела ( пример 3.10.8) су:

$$\omega_1 = 32 \sqrt{\frac{3(16-11\sqrt{2}) EI_x}{14 ml^3}}, \quad \omega_2 = 32 \sqrt{\frac{3 EI_x}{2 ml^3}}, \quad \omega_3 = 32 \sqrt{\frac{3(16+11\sqrt{2}) EI_x}{14 ml^3}}. \quad (11)$$

Узимајући као референтне вредности кружних фреквенција (7.4.15):

$$\omega_1^* = \pi^2 \sqrt{\frac{EI_x}{ml^3}}, \quad \omega_2^* = 4\pi^2 \sqrt{\frac{EI_x}{ml^3}}, \quad \omega_3^* = 9\pi^2 \sqrt{\frac{EI_x}{ml^3}}, \quad (12)$$

могу се израчунати релативне грешке:

$u$	1	2	3
$(\omega_i - \omega_i^*) / \omega_i^* \times 100\%$	<b>-0.03%</b>	<b>-0.73%</b>	<b>-6.75%</b>

и уочити степен поклапања резултата. Повећањем броја редукованих маса релативне грешке се смањују, нарочито код нижих фреквенција.

Главни облици осциловања редукованог модела приказани су на сл. 3.23а. Пошто су прва три главна облика осциловања у овом примеру (9) дата функцијама облика:

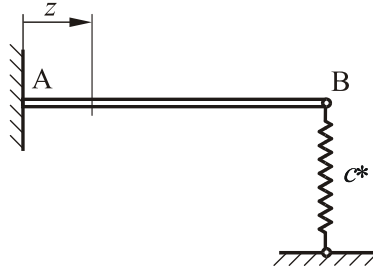
$$\sin(n\pi z / l), (n = 1, 2, 3), \quad (13)$$

могу се израчунати и угиби на местима концентрисаних маса:

$\Downarrow z n \Rightarrow$	1	2	3
$l/4$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$
$l/2$	1	0	-1
$3l/4$	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}/2$

Из ове табеле може се уочити потпуно подударање угиба на местима концентрисаних маса прва три главна облика осциловања греде као еластичног тела и одговарајућег приближног решења са три концентрисане масе које осцилују на лакој греди.

**Пример 7.4.2:** Конзола  $AB$ , масе  $m$ , дужине  $l$ , модула еластичности  $E$  и аксијалног момента инерције површине попречног пресека  $I_x$ , везана је у тачки  $B$  опругом крутости  $c^*$ . Написати карактеристичну једначину трансверзалних осцилација носача. Посебно анализирати случајеве  $c^* = 0$  и  $c^* = \infty$ .



Слика 7.26

**Решење:** Опште решење диференцијалних једначина попречних осцилација гласи:

$$v(z, t) = (C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \cosh kz + C_4 \sinh kz)T(t). \quad (1)$$

У складу са контурним условима, угиб и нагиб у тачки  $A$  једнаки су нули:

$$v(0, t) = 0, v'(0, t) = 0, \quad (2)$$

док је у тачки  $B$  момент савијања једнак нули:

$$-EI_x v''(l, t) = 0, \quad (3)$$

а трансверзална сила једнака је сили у опрузи:

$$-EI_x v'''(l, t) = -c^* v(l, t). \quad (4)$$

Заменом (1) у контурне услове (2), (3) и (4) добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0, \\ C_2 + C_4 &= 0, \\ -C_1 \cos kl - C_2 \sin kl + C_3 \cosh kl + C_4 \sinh kl &= 0, \\ EI_x k^3 (C_1 \sin kl - C_2 \cos kl + C_3 \sinh kl + C_4 \cosh kl) &= \\ &= c^* (C_1 \cos kl + C_2 \sin kl + C_3 \cosh kl + C_4 \sinh kl), \end{aligned} \quad (5)$$

који има нетривијална решења по  $C_1, C_2, C_3, C_4$  само ако је:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos kl & -\sin kl & \cosh kl & \sinh kl \\ EI_x k^3 \sin kl - & -EI_x k^3 \cos kl - & EI_x k^3 \sinh kl - & EI_x k^3 \cosh kl - \\ -c^* \cos kl & -c^* \sin kl & -c^* \cosh kl & -c^* \sinh kl \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

тако да карактеристична једначина у развијеном облику гласи:

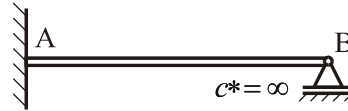
$$EI_x k^3 (1 + \cosh kl \cos kl) + c^* (\cosh kl \sin kl - \sinh kl \cos kl) = 0. \quad (7)$$

Случај  $c^* = 0$  одговара конзоли са слободним крајем (сл. 7.26а) и карактеристична једначина следи директно из (7):

$$\cosh kl \cos kl = -1. \quad (8)$$



Слика 7.26а



Слика 7.26б

Случај  $c^* = \infty$  одговара ослоњу у тачки  $B$  (сл. 7.26б). Карактеристична једначина се изводи директно из (7) из услова:

$$\lim_{c^* \rightarrow \infty} \frac{EI_x k^3}{c^*} = 0, \quad (9)$$

и има облик:

$$\operatorname{tgh} kl = \operatorname{tg} kl. \quad (10)$$

**Пример 7.4.3:** На крају конзоле, дужине  $l$ , површине попречног пресека  $A$ , савојне крутости  $EI_x$  и густине  $\rho$ , заварен је крути хомогени диск масе  $m$  и полупречника  $R$ . Написати карактеристичну једначину попречних осцилација.

**Решење:** Опште решење трансверзалних осцилација дато је изразом:

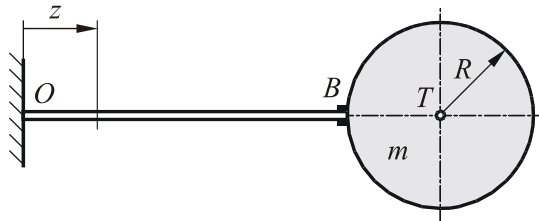
$$v(z, t) = (C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + C_3 \cosh kz + C_4 \sinh kz)T(t), \quad (1)$$

где је:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \omega = k^2 c = k^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}}, \quad (2)$$

Угиб и нагиб у пресеку  $O$  једнаки су нули:

$$v(0, t) = 0, v'(0, t) = 0. \quad (3)$$



Слика 7.27

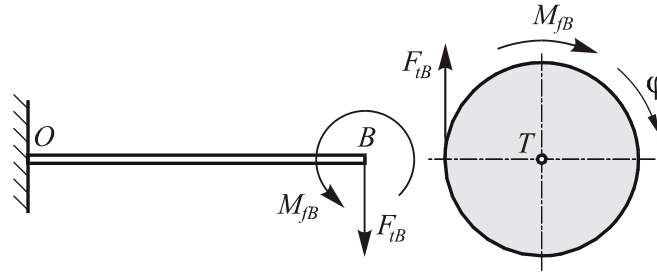
Контурни услови у тачки  $B$  формулишу се применом закона о кретању средишта маса и закона о промени кинетичког момента диска:

$$m \ddot{v}_T = -F_{tB}, \quad (4)$$

$$J \ddot{\varphi} = M_{fB} + F_{tB} R, J = \frac{1}{2} m R^2.$$

На диск делују трансверзална сила и момент савијања (сл. 7.27а):

$$\begin{aligned} F_{tB} &= -EI_x v'''(l, t), \\ M_{fB} &= -EI_x v''(l, t). \end{aligned} \quad (5)$$



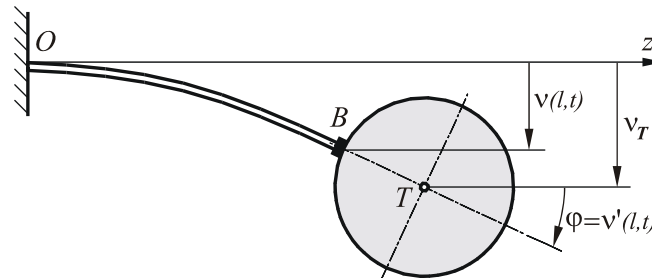
Слика 7.27а

Померање  $v_T$  средишта диска и угао  $\varphi$  (сл. 7.27б) дати су изразима:

$$\begin{aligned} v_T &= v(l, t) + Rv'(l, t), \\ \varphi &= v'(l, t), \end{aligned} \quad (6)$$

одакле следи:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_T &= -\omega^2[v(l, t) + Rv'(l, t)], \\ \ddot{\varphi} &= -\omega^2 v'(l, t). \end{aligned} \quad (7)$$

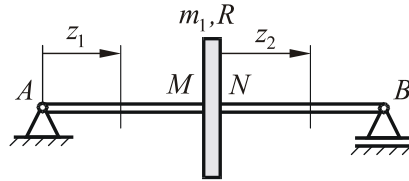


Слика 7.27б

Заменом (1), (2), (5) и (7) у контурне услове (3) и (4) добија се хомогени систем једначина коме одговара карактеристична једначина:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -mk \cos kl & -mk \sin kl & -mk \cosh kl & -mk \sinh kl \\ +mk^2 R \sin kl & -mk^2 R \cos kl & -mk^2 R \sinh kl & -mk^2 R \cosh kl \\ -\rho A \sin kl & +\rho A \cos kl & -\rho A \sinh kl & -\rho A \cosh kl \\ mR^2 k^3 \sin kl & -mR^2 k^3 \cos kl & -mR^2 k^3 \sinh kl & -mR^2 k^3 \cosh kl \\ -2\rho A \cos kl & -2\rho A \sin kl & +2\rho A \cosh kl & +2\rho A \sinh kl \\ +2\rho ARk \sin kl & -2\rho ARk \cos kl & +2\rho ARk \sinh kl & +2\rho ARk \cosh kl \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

**Пример 7.4.4:** На средини просте греде масе  $m$ , дужине  $2l$ , модула еластичности  $E$ , површине попречног пресека  $A$  и момента инерције површине попречног пресека  $I_x$ , причвршћен је танки хомогени диск масе  $m_1$  и полупречника  $R$ , тако да се оса симетрије диска и оса носача поклапају. Написати карактеристичну једначину за случај попречних осцилација греде.



Слика 7.28

**Решење:** Решавањем диференцијалне једначине попречних осцилација по деловима греде  $AM$  и  $NB$ , добијају се општа решења:

$$\begin{aligned} v_1(z_1, t) &= (C_1 \cos kz_1 + C_2 \sin kz_1 + C_3 \cosh kz_1 + C_4 \sinh kz_1)T(t), \\ v_2(z_2, t) &= (D_1 \cos kz_2 + D_2 \sin kz_2 + D_3 \cosh kz_2 + D_4 \sinh kz_2)T(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где је:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad \omega = k^2 c = k^2 \sqrt{\frac{2EI_x l}{m}}. \quad (2)$$

Угиби и моменти савијања у пресецима  $A$  и  $B$  једнаки су нули:

$$\begin{aligned} v_1(0, t) = 0, \quad v_2(l, t) = 0, \\ -EI_x v_1''(0, t) = 0, \quad -EI_x v_2''(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

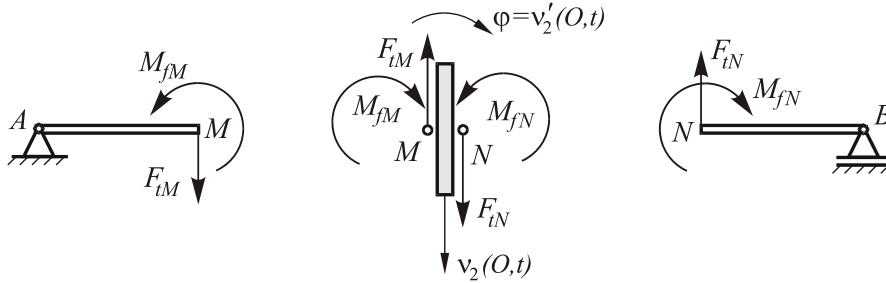
Пошто је диск танак, угиби и нагиби у пресецима  $M$  и  $N$  међусобно су једнаки:

$$\begin{aligned} v_1(l, t) = v_2(0, t), \\ v_1'(l, t) = v_2'(0, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Преостала два контурна услова добијају се применом закона о кретању средишта маса и закона о промени кинетичког момента диска, на који, у пресецима  $M$  и  $N$ , делују одговарајуће трансверзалне силе и моменти савијања (сл. 7.28a):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{v}(0, t) &= F_{iN} - F_{iM}, \\ J \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v_2'(0, t)] &= M_{fM} - M_{fN}, \quad J = \frac{1}{4} m_1 R^2. \end{aligned} \quad (5)$$





Слика 7.28а

Вредности трансверзалних сила и момената савијања дате су изразима:

$$\begin{aligned}
 F_{tM} &= -EI_x v_1''(l, t), \\
 F_{tN} &= -EI_x v_2''(0, t), \\
 M_{fM} &= -EI_x v_1'(l, t), \\
 M_{fN} &= -EI_x v_2'(0, t).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Пошто је:

$$\begin{aligned}
 \ddot{v}_2(0, t) &= -\omega^2 v_2(0, t), \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v_2'(0, t)] &= -\omega^2 v_2'(0, t),
 \end{aligned} \tag{7}$$

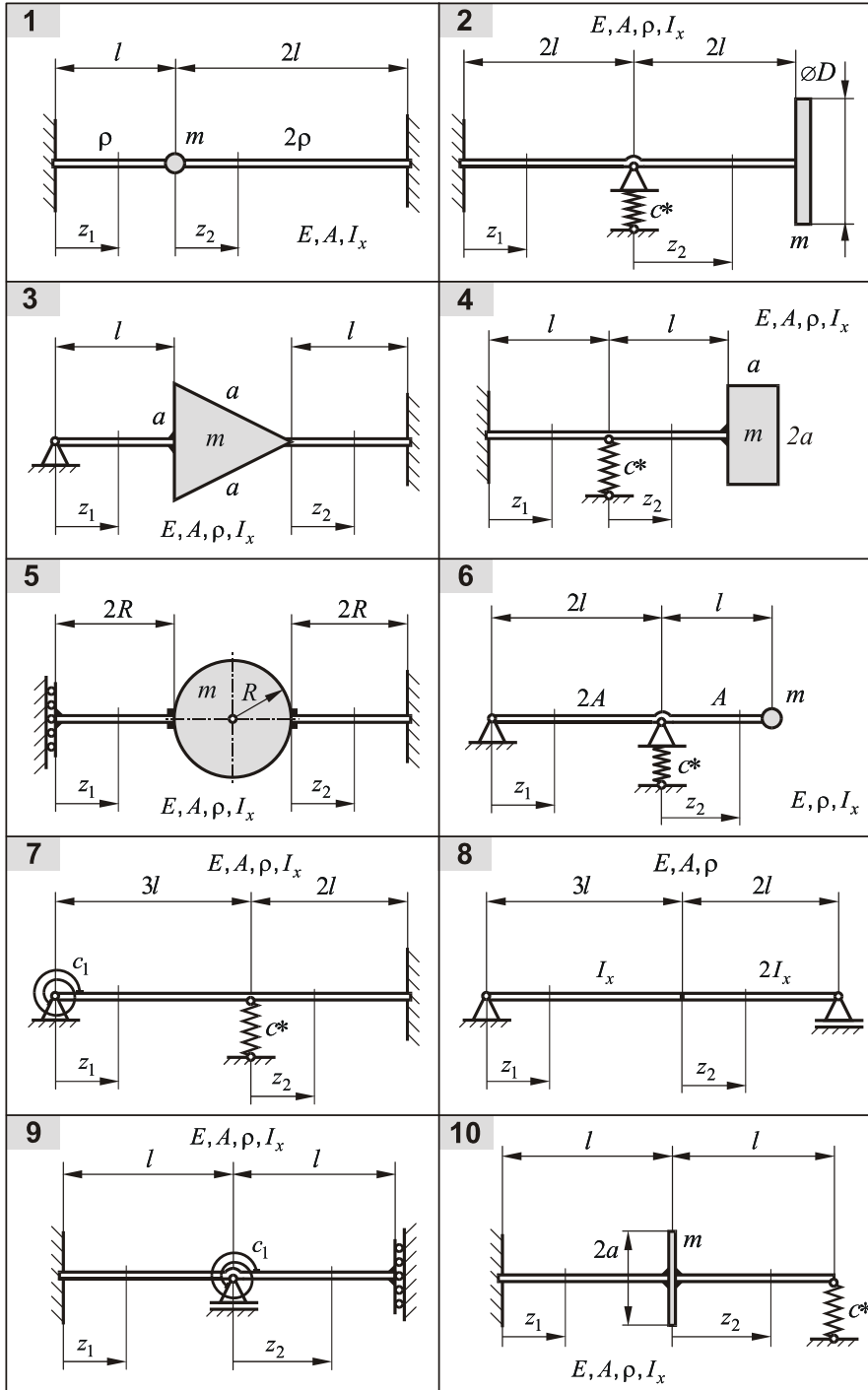
заменом (1), (2) и (7) у контурне услове (3), (4) и (5), добија се да је:

$$C_1 = C_3 = 0. \tag{8}$$

као и карактеристична једначина:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & \cosh kl & \sinh kl \\
 0 & 0 & -\cos kl & -\sin kl & \cosh kl & \sinh kl \\
 \sin kl & \sinh kl & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 \cos kl & \cosh kl & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 -m \cos kl & m \cosh kl & 2m_1 kl & m & 2m_1 lk & -m \\
 m \sin kl & -m \sinh kl & -m & 2Jk^3 l & m & 2Jk^3 l
 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

**Пример 7.4.5** На сл.7.29 ( 1-10 ) приказани су равнотежни положаји система еластичних тела која врше попречне осцилације, као и вредности одговарајућих задатих величина.Тела су ненапрегнута у равнотежном положају. Написати контурне услове.



Слика 7.29

**Решења:****1. задатак**

$$k_1 = k, \quad k_2 = k\sqrt{2}, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x / (\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] v_1'(0, t) = 0, \\ [3] v_1(l, t) = v_2(0, t), \quad [4] v_1'(l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] -EI_x v_1''(l, t) = -EI_x v_2''(0, t), \\ [6] m \ddot{v}_2(0, t) = (-EI_x v_2'''(0, t)) - (-EI_x v_1'''(l, t)), \quad [7] v_2(2l, t) = 0, \quad [8] v_2'(2l, t) = 0.$$

**2. задатак**

$$k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x / (\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] v_1'(0, t) = 0, \\ [3] v_1(2l, t) = v_2(0, t), \quad [4] v_1'(2l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] -EI_x v_1''(2l, t) = -EI_x v_2''(0, t), \\ [6] c^* v_2(0, t) + (-EI_x v_1'''(2l, t)) = -EI_x v_2'''(0, t), \quad [7] m \ddot{v}_2(2l, t) = -(-EI_x v_2'''(2l, t)), \\ [8] \frac{mD^2}{16} \ddot{v}_2'(2l, t) = -EI_x v_2''(2l, t).$$

**3. задатак**

$$k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x / (\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] -EI_x v_1''(0, t) = 0, \\ [3] v_1'(l, t) = v_2'(0, t), \quad [4] v_1(l, t) + \frac{a\sqrt{3}}{2} v_2'(0, t) = v_2(0, t), \\ [5] m(\ddot{v}_2(0, t) - \frac{a\sqrt{3}}{3} \ddot{v}_2'(0, t)) = (-EI_x v_2'''(0, t)) - (-EI_x v_1'''(l, t)), \\ [6] \frac{ma^2}{12} \ddot{v}_2'(0, t) = -EI_x (-v_2''(0, t) + v_1''(l, t) + v_1'''(l, t) \frac{a\sqrt{3}}{6} + v_2'''(0, t) \frac{a\sqrt{3}}{3}), \\ [7] v_2(l, t) = 0, \quad [8] v_2'(l, t) = 0.$$

**4. задатак**

$$k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x / (\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] v_1'(0, t) = 0, \quad [3] v_1(l, t) = v_2(0, t), \\ [4] v_1'(l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] -EI_x v_1''(l, t) = -EI_x v_2''(0, t), \\ [6] -EI_x v_1'''(l, t) + c^* v_2(0, t) = -EI_x v_2'''(0, t), \quad [7] m(\ddot{v}_2(l, t) + \frac{a}{2} \ddot{v}_2'(l, t)) = -(-EI_x v_2'''(l, t)), \\ [8] \frac{5ma^2}{12} \ddot{v}_2'(l, t) = -EI_x v_2''(l, t) - \frac{a}{2} EI_x v_2'''(l, t).$$

**5. задатак**

$$k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x / (\rho A)}, \quad [1] v_1'(0, t) = 0, \quad [2] -EI_x v_1'''(0, t) = 0, \\ [3] v_1'(2R, t) = v_2'(0, t), \quad [4] v_2(0, t) = v_1(2R, t) + 2R v_2'(0, t), \\ [5] m(\ddot{v}_2(0, t) - R \ddot{v}_2'(0, t)) = -EI_x v_2'''(0, t) + EI_x v_1'''(2R, t), \\ [6] \frac{mR^2}{2} \ddot{v}_2'(0, t) = -EI_x (v_1''(2R, t) - v_2''(0, t) + R v_1'''(2R, t) + R v_2'''(0, t)), \\ [7] v_2(2R, t) = 0, \quad [8] v_2'(2R, t) = 0.$$

**6. задатак**

$$\begin{aligned}
&k_1 = k, \quad k_2 = k/\sqrt[4]{2}, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x/(\rho \cdot 2A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] -EI_x v_1''(0, t) = 0, \\
&[3] v_1(2l, t) = v_2(0, t), \quad [4] v_1'(2l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] -EI_x v_1''(2l, t) = -EI_x v_2''(0, t), \\
&[6] -EI_x v_2'''(0, t) = -EI_x v_1'''(2l, t) + c^* v_2(0, t), \\
&[7] -EI_x v_2''(l, t) = 0, \quad [8] m \ddot{v}_2(l, t) = EI_x v_2'''(l, t).
\end{aligned}$$

**7. задатак**

$$\begin{aligned}
&k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x/(\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] -EI_x v_1''(0, t) = -c_1 v_1'(0, t), \\
&[3] v_1(3l, t) = v_2(0, t), \quad [4] v_1'(3l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] -EI_x v_1''(3l, t) = -EI_x v_2''(0, t), \\
&[6] -EI_x v_2''(0, t) = -EI_x v_1''(3l, t) + c^* v_2(0, t), \quad [7] v_2(2l, t) = 0, \quad [8] v_2'(2l, t) = 0.
\end{aligned}$$

**8. задатак**

$$\begin{aligned}
&k_1 = k, \quad k_2 = k/\sqrt[4]{2}, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x/(\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] -EI_x v_1''(0, t) = 0, \\
&[3] v_1(3l, t) = v_2(0, t), \quad [4] v_1'(3l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] -EI_x v_1'''(3l, t) = -2EI_x v_2'''(0, t), \\
&[6] -EI_x v_1''(3l, t) = -2EI_x v_2''(0, t), \quad [7] v_2(2l, t) = 0, \quad [8] -2EI_x v_2''(2l, t) = 0.
\end{aligned}$$

**9. задатак**

$$\begin{aligned}
&k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x/(\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] v_1'(0, t) = 0, \quad [3] v_1(l, t) = 0, \\
&[4] v_2(0, t) = 0, \quad [5] v_1'(l, t) = v_2'(0, t), \quad [6] -EI_x v_2''(0, t) = -EI_x v_1''(l, t) - c_1 v_2'(0, t), \\
&[7] v_2'(l, t) = 0, \quad [8] -EI_x v_2'''(l, t) = 0.
\end{aligned}$$

**10. задатак**

$$\begin{aligned}
&k_1 = k_2 = k, \quad \omega = k^2 \sqrt{EI_x/(\rho A)}, \quad [1] v_1(0, t) = 0, \quad [2] v_1'(0, t) = 0, \\
&[3] v_1(l, t) = v_2(0, t), \quad [4] v_1'(l, t) = v_2'(0, t), \quad [5] m \ddot{v}_2(0, t) = -EI_x v_2''(0, t) + EI_x v_1'''(l, t), \\
&[6] \frac{m(2a)^2}{12} \ddot{v}_2'(0, t) = -EI_x v_1''(l, t) + EI_x v_2''(0, t), \\
&[7] -EI_x v_2''(l, t) = 0, \quad [8] -EI_x v_2'''(l, t) = -c^* v_2(l, t).
\end{aligned}$$

